SCHAUM'S
ouTlines

全美经典学习指导系列

静力学与材料力学

〔美〕W. 纳什 著
郭长铭 译

- 获取高分的有力助手
- 涵盖本课程的所有基础，是任一教材的补充
- 教授有效的解题方法
- 211道详细解答的例题
- 理想的自学读物

科学出版社
麦格劳-希尔教育出版集团

全美经典学习指导系列

静力学与材料力学

〔美〕W.纳什　著

郭　长　铭　译

科　学　出　版　社

麦格劳-希尔教育出版集团

内 容 简 介

本书为全美经典学习指导系列之一.

本书系统地介绍了静力学和材料力学的基本概念、定律,并对例题给出了详细解答.每章均有补充习题供读者练习.

本书可供高等专科院校、工科院校的材料系、机械工程系及其他相关专业的学生使用.

William A. Nash: Schaum's Outline of Theory and Problems of Statics and Mechanics of Materials
ISBN:0-07-045896-0
Copyright ©1992 by the McGraw-Hill Companies, Inc.
Authorized translation from the English language edition published by McGraw-Hill Companies, Inc.
All rights reserved.

本书中文简体字版由科学出版社和美国麦格劳-希尔教育出版集团合作出版。未经出版者书面许可,不得以任何方式复制或抄袭本书的任何部分.
版权所有,翻印必究.
本书封面贴有 McGraw-Hill 公司防伪标签,无标签者不得销售

图字:01-2001-1763 字
图书在版编目(CIP)数据

静力学与材料力学/(美)纳什(Nash, W.)著;郭长铭译.—北京:科学出版社,2002.1
(全美经典学习指导系列)
ISBN 7-03-009404-2

Ⅰ.静… Ⅱ.①纳…②郭… Ⅲ.①静力学②材料力学 Ⅳ.①O312 ②TB301

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 037723 号

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2002 年 1 月第 一 版 开本:A4(890×1240)
2002 年 1 月第 一次印刷 印张:14 1/2
印数:1—4 000 字数:1—416 000
定价:25.00 元
(如有印装质量问题,我社负责调换〈新欣〉)

前　言

《静力学和材料力学》这本书涵盖了书名上两门课的实质内容，同时也涵盖了诸如“静力学”、“材料力学”、“材料强度”或“固体力学”等课程的内容，这些课程至少与书名中的一门课密切相关．全书的内容大致平均分为刚体力学和可变形体力学两部分．可变形体力学的处理方法从本质上讲是普遍的．它从可应用于任何弹性体的平衡微分方程出发，证明在特殊条件下由这些方程可得到适用于普遍工程问题的解．

每一章开头都是重要概念的概述，随后是一组示范例题，告诉读者如何运用本章的概念来解题，这些概念在有些题目中得到了深化或推广；最后是习题（只给出答案）．习题的类型是比较新颖的，基本上均分为使用现代国际单位制（SI）和传统的英制单位（USCS）两类．最重要的是例题中详细列出并运用了 11 个计算程序，显示了现代计算机技术可将枯燥乏味的计算变得轻巧快捷．这些程序一直在 CYBER 系统的主机上运行．只要在输入格式上稍作改动就能在大多数 PC 机上使用．

作者感谢对编写本书作出了巨大贡献的几位同事，尤其要对凯思琳·德温（Kathleen Derwin）表示衷心的感谢！她编写了大部分计算机程序并仔细审阅了几乎全部的习题和运算．同样要感谢拉芬德拉(B. S. Ravindra)和 Gao-Qui Zhu，他们编写了书中一些计算机程序．本书的很多章节是作者在西德 Darmstadt 工业大学当客座教授时写成的．感谢波恩的 Alexander von Humboldt 基金会使那次访问得以成行，也感谢 Darmstadt 工业大学教职员工的热情好客．在此感谢爱德华·米尔门（Edwavd Millman）先生在编辑工作方面给予的有力的帮助！

最后，作者向他的妻子弗娜（Verna B. Nash）表示深深的歉意．她对本书的编写表现出极大的耐心和赞许．

(O-1514.0101)
责任编辑：陈玉琢

SCHAUM'S ouTlines

全球销量超越3000万的
“全美经典学习指导系列”
是您的最佳
学习伴侣！

40年来最畅销的教辅系列
全美著名高校资深教授倾力之作
国内重点高校任课教师全力推荐并担当翻译
省时高效的学习辅导，全面详细的习题解答
迄今为止国内最全面的教辅系列
覆盖大学理工科专业

全美经典学习指导系列

概率和统计	2000工程力学习题精解	电气工程基础
统计学	工程力学	工程电磁场基础
离散数学	3000物理习题精解	数字信号处理
Mathematica使用指南	流体动力学	数字系统导论
数理金融引论	物理学基础	数字原理
机械振动	材料力学	电机与机电学
微分方程	2000离散数学习题精解	基本电路分析
统计学原理（上）	工程热力学	信号与系统
统计学原理（下）	数值分析	微生物学
微积分	量子力学	生物化学
静力学与材料力学	有机化学习题精解	生物学
有限元分析	3000化学习题精解	分子和细胞生物学
传热学	大学化学习题精解	人体解剖与生理学
近代物理学	电路	

http://www.sciencep.com http://www.mheducation.com

ISBN 7-03-009619-3
9 787030 096197 >
ISBN 7-03-009619-3/O · 1514
定 价：36.00 元

目　录

第一部分　刚体力学 ……（1）

第一章　力和力系的性质 ……（1）

力的分量，矢量加法，点积，矢量的方向，叉积，力对点的力矩，三重混合积，力对轴之矩，力偶矩，伐里农定理，等效力系；合力；

第二章　静力学：刚体的平衡 ……（22）

分离体图，约束及力的标注，所需独立平衡方程的数目；

第三章　摩擦的作用 ……（35）

干摩擦，考虑摩擦作用的问题，摩擦带；

第四章　空间力系作用下物体的平衡 ……（49）

第五章　桁架 ……（60）

第六章　形心，惯性矩和分布载荷 ……（71）

形心和第一类矩，面积的第二类矩或惯性矩，面积惯性矩的平行轴定理，回转半径，分布载荷；

第七章　轴向力，扭矩，剪切力和弯矩 ……（87）

轴向力，扭矩，剪切力，弯矩，符号规定，载荷强度、剪切力和弯矩间的关系，奇异函数，计算机解；

第二部分　可变形体力学 ……（100）

第八章　应力应变分析 ……（100）

法向应力，剪切应力，点的一般应力状态，主应力，主应力的方向，最大剪切应力，法向应变，剪应变，斜面上的应变，主应变，应力-应变曲线，弹性模量，比例极限，弹性极限，各向同性和各向异性材料，均匀和非均质材料，位移，协调方程，泊松比，胡克定律，线性热膨胀系数，体积增量，体积了弹性模量，平衡微分方程；

第九章　均匀拉力、压力和剪切力 ……（121）

均匀拉力或压力，轴向载荷作用下的恒截面杆，轴向载荷作用下的变截面杆，静力学方程，形变几何学，热效应，加工误差和安装误差，静定力系，静不定力系，均匀剪切应力，最终强度分析（极限设计）；

第十章　旋转薄环和薄壳 ……（142）

圆柱壳体，球壳，旋转壳体

第十一章　扭转 ……（153）

扭转剪切应力，极惯性矩，剪切应变，剪切弹性模量，扭转角，动力传递，计算机解，圆杆的弹塑性扭转；

第十二章　梁中的应力 ……（164）

梁，中性轴，弯矩和剪切力，梁的弹性弯曲，梁的弹塑性弯曲和完全塑性弯曲；

第十三章　梁的挠度 ……（183）

两次积分法，奇异函数法，计算机解，变截面梁，静不定梁；

第十四章　综合载荷：破坏理论和设计方法 ……（206）

最大法向应力理论，最大剪切应力（特雷斯卡）理论，胡贝尔-冯·米泽

斯-亨奇（最大变形能）理论；
第十五章　柱 …… （213）
柱的破坏，长细比，临界载荷，非弹性柱的屈曲，具有中等长细比柱的设计公式，弹簧支撑刚性杆的屈曲；
译者后记 …… （224）

第一部分　刚体力学

第一章　力和力系的性质

力的分量

力 $\boldsymbol{F}$ 在 x 和 y 方向的分量(或称标量分量)分别以 F_x 和 F_y 表示(图 1-1),并且

$$F_x = |\boldsymbol{F}| \cos\theta \qquad F_y = |\boldsymbol{F}| \sin\theta \tag{1.1}$$

式中两道竖线表示矢量 $\boldsymbol{F}$ 的模

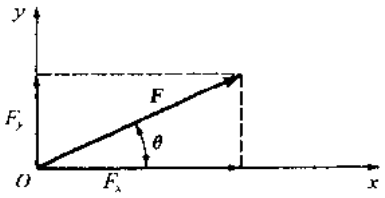


图 1-1

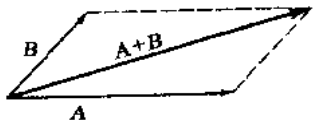


图 1-2

矢量加法

只要取两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 作为平行四边形相邻的两边,$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 即可相加,如图 1-2 所示.$\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的矢量和(或合矢量)就是从 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的起点出发,沿对角线延伸到对角的矢量.这就是矢量相加的平行四边形法则.我们有时称图 1-2 中的矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 为合矢量 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 的矢量分量.

点积

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的点积(或标量积),等于两矢量的大小之积再乘以它们所夹锐角的余弦,如图 1-3 所示

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}|\,|\boldsymbol{B}| \cos\alpha \tag{1.2}$$

沿 x、y 和 z 轴取单位矢量(即单位长度的矢量)进行运算通常比较方便,如图 1-4 所示.单位矢量分别以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 表示.由式(1.2)可知

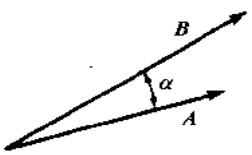


图 1-3

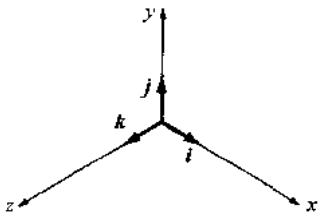


图 1-4

$$\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \cdot \boldsymbol{j} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$$

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{k}=0 \tag{1.3}$$

在三维空间中上述矢量和单位矢量的概念如图 1-5 所示.

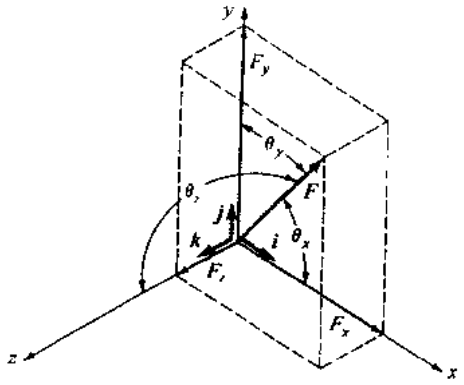


图 1-5

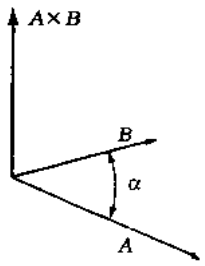


图 1-6

矢量的方向

在图 1-5 中,矢量 $\boldsymbol{F}$ 的方向用三个角 θ_x、θ_y 和 θ_z 来规定,其中

$$\cos\theta_x=\frac{F_x}{|\boldsymbol{F}|}\qquad \cos\theta_y=\frac{\boldsymbol{F}_y}{|\boldsymbol{F}|}\qquad \cos\theta_z=\frac{F_z}{|\boldsymbol{F}|} \tag{1.4}$$

$\cos\theta_x$、$\cos\theta_y$ 和 $\cos\theta_z$ 称为矢量 $\boldsymbol{F}$ 的方向余弦,它们完全规定了 $\boldsymbol{F}$ 的方向.

叉积

两矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积(或矢量积)定义为这样一个矢量,其方向垂直于矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 所在的平面,其大小等于 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 大小之积再乘以它们所夹锐角的正弦,即

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha \tag{1.5}$$

叉积的定义如图 1-6 所示.$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 的指向由右手法则确定.

对单位矢量 $\boldsymbol{i}$,$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$(图 1-4),我们有如下结果:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{i}=0 && \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}=-\boldsymbol{k} && \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}=\boldsymbol{j}\\ &\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}=\boldsymbol{k} && \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{j}=0 && \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}=-\boldsymbol{i}\\ &\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}=-\boldsymbol{j} && \boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i} && \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k}=0\end{aligned} \tag{1.6}$$

我们可以将 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积用分量和单位矢量形式表达

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\times(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k})$$

由式(1.6)得

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_yB_z-A_zB_y)\boldsymbol{i}+(A_zB_x-A_xB_z)\boldsymbol{j}+(A_xB_y-A_yB_x)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\A_x&A_y&A_z\\B_x&B_y&B_z\end{vmatrix}\end{aligned} \tag{1.7}$$

力对点的力矩

力 $\boldsymbol{F}$ 对点 A 的力矩可由下面叉积式来定义

$$\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F} \tag{1.8}$$

式中 $\boldsymbol{r}$ 是从点 A 至 $\boldsymbol{F}$ 上任一点的矢量.由叉积的定义式(1.5),矩 $\boldsymbol{M}_0$ 是垂直于 $\boldsymbol{r}$ 和 $\boldsymbol{F}$ 所在平面的一矢量,$\boldsymbol{r}$,$\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{M}_0$ 构成一个符合右手法则的系统.三矢量的关系如图 1-7 所示,图中为与力矢量有所区别,矩矢量用双箭头表示

如图 1-7 所示，若从点 A 作力 $\boldsymbol{F}$ 作用线的垂线并令此垂直距离为 d，由式(1.5)可知，$\boldsymbol{M}_0$ 的大小为

$$| \boldsymbol{M}_0 | = | \boldsymbol{r} | | \boldsymbol{F} | \sin\alpha = d | \boldsymbol{F} | \tag{1.9}$$

上式在二维问题中使用十分方便，习惯上省略绝对值符号而表示成

$$M_0 = Fd \tag{1.10}$$

(见例题 1.7)

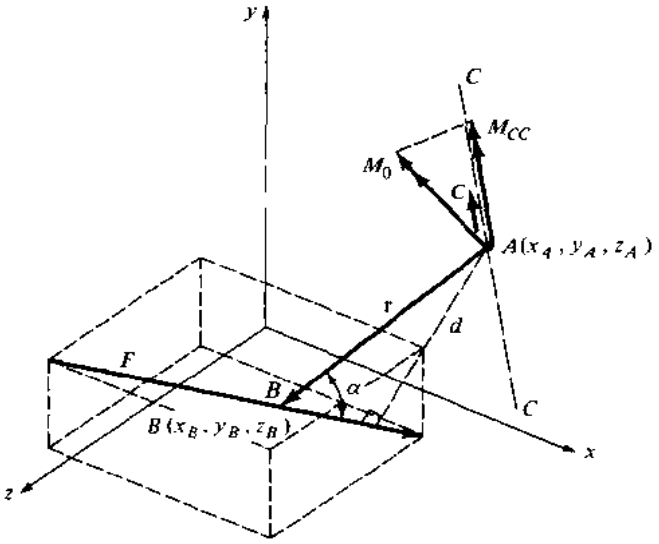


图 1-7

三重混合积

矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的三重混合积(或三重标量积)定义为

$$\boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) \tag{1.11}$$

上式可表示成

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) &= A_x(B_yC_z - B_zC_y) + A_y(B_zC_x - B_xC_z) + A_z(B_xC_y - B_yC_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned} \tag{1.12}$$

力对轴之矩

仍考虑图 1-7 中的力 $\boldsymbol{F}$. 前面我们定义了 $\boldsymbol{F}$ 对点 A 之矩，现将通过点 A 来定义力对轴之矩. 由于 $\boldsymbol{F}$ 对点 A 之矩为矢量 $\boldsymbol{M}_0$，现在定义对通过点 A 任何轴 CC 之矩 $\boldsymbol{M}_{CC}$ 为 $\boldsymbol{M}_0$ 在 CC 轴上的投影. 于是

$$| \boldsymbol{M}_{CC} | = \boldsymbol{C} \cdot \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{C} \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F}) \tag{1.13}$$

上式可化成

$$| \boldsymbol{M}_{CC} | = \begin{vmatrix} C_x & C_y & C_z \\ x_B - x_A & y_B - y_A & z_B - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \tag{1.14}$$

力偶矩

一力偶包括大小相等、作用线平行、方向相反的两个力，如图 1-8 所示. 力偶在任何方向上均不产生总的力效应，但它会引起转动. 将式(1.9)用于力偶中的每一个力再相加而得力偶矩. 因为力偶实质上是矩矢量，所以在三维空间中用矩的矢量表示法(双箭头)来表示力偶比较方便.

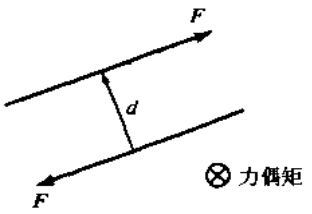


图 1-8

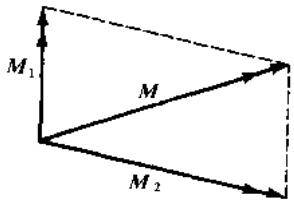


图 1-9

另外，由于力偶是矩矢量，故由矢量相加，易得两力偶 $\boldsymbol{M}_1$ 和 $\boldsymbol{M}_2$ 之和

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2 \tag{1.15}$$

三者的关系可见图 1-9.

一力偶可沿任何坐标轴分解，如 x, y, z 坐标系. 这一点与力是一致的.

伐里农定理

设 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 是力 $\boldsymbol{F}$ 的两个分(矢)量. 伐里农定理表明，$\boldsymbol{F}$ 对任一点 O 之矩等于 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 对同一点之矩的和. 需要指出的是 $\boldsymbol{F}, \boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 必须共点(即所有的力交于一点).

等效力系；合力

通常希望将一给定的力系简化到最简单、与之等效的形式，称为力系的合力. 合力可以具有各种形式，取决于所涉及到的力系的类型。有以下几种重要的情况：

1. *共点力系* 所有的力汇交于一点，并可按图 1-2 所示方法相加. 合力(所有力之和)自然通过同一点(见例题 1.18 和 1.24)

2. *共面力系* 所有的力全在同一平面上，也可按图 1-2 所示方法相加. 或者，将给定力系各力的分量相加而得到合力的分量. 此时必须要确定合力作用线的位置. 方法如下：将给定力系对某一(取矩)方便的点取矩，将合力对同一点取矩，令二者相等. 于是，共面力和力偶系的合力是一个单独的力，其作用线位置是确定的和惟一的.

3. *平行力系* 且所有力皆在同一平面上，此时产生一合力，该合力就是力系中所有力的代数和. 合力的作用线确定如下：将给定力系对某一(取矩)方便的点取矩，并使之与合力对同一点之矩相等(由伐里农定理推知). 在某些情况下，这种平行力系的合力是一力偶(见例题1.19，1.20 和 1.22).

4. *平行力系* 但各力不在同一平面内，此时产生一合力，该合力为力系中所有力的代数和. 合力的作用线确定如下：将给定力系对位于与给定力系相垂直的平面内两根轴分别取矩，并使之与合力对同一轴之矩相等

5. *空间一般力和力偶系* 有可能简化成作用在任意指定点上的一个力和一力偶，且二者皆不为零

例　题

1.1 俄亥俄河上一座缆索桥的结构如图 1-10 所示，缆索对于塔杆是对称分布的. 缆索①的 4

根钢缆中每一根所受的拉力为 6 000 000 lb;缆索②的 4 根钢缆中每一根所受的拉力为 3 800 000 lb;缆索③的 4 根钢缆中每一根所受的拉力为 2 300 000 lb.试求所有 12 根钢缆所受拉力总垂直分量,该数据在塔杆设计中有用.

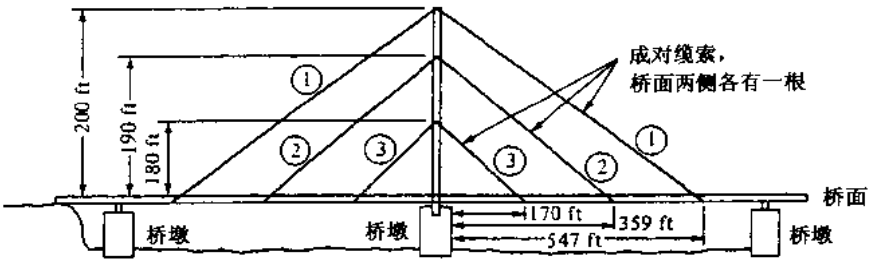


图 1-10

解 塔杆右侧三根钢缆的受力情况如图 1-11 所示.我们首先来求各缆索的长度.对缆索①

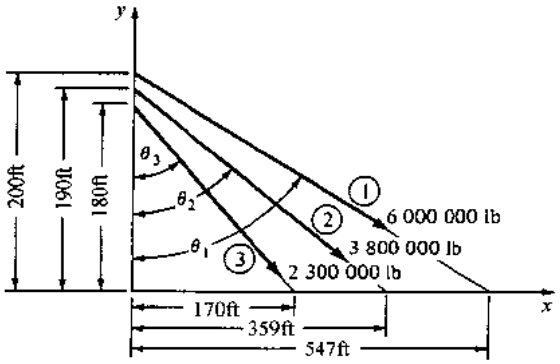


图 1-11

$$L_1 = \sqrt{(200)^2 + (547)^2} = 582.4 \text{ ft}$$

同理,$L_2 = 406.1$ ft,$L_3 = 247.6$ ft

拉力在 y 方向总的分量为

$$\begin{aligned} F_y &= 6\,000\,000\cos\theta_1 + 3\,800\,000\cos\theta_2 + 2\,300\,000\cos\theta_3 \\ &= 6\,000\,000\frac{200}{582.4} + 3\,800\,000\frac{190}{406.1} + 2\,300\,000\frac{180}{247.6} \\ &= 5\,510\,000 \text{ lb(向下)} \end{aligned}$$

其方向向下.因为在中心塔杆右侧有 2 组缆索,在其左侧也有 2 组缆索,所以 12 根钢缆所受总的向下垂直分量为 $4 \times 5\,510\,000 = 22\,040\,000$ lb

1.2 在热轧铝质板坯生产精整铝板时,板坯的厚度减少约 40% 并产生很大的力.试验发现,在板坯的侧面形成一个三角形,其两边分别作用有法向和切向力,如图 1-12 所示.求这 4 个力的矢量和(合力).

解 由图 1-12 可知

$$\begin{aligned} R_x &= 2400\cos45^\circ - 1200\cos45^\circ - 1600\cos30^\circ + 1400\cos60^\circ \\ &= 2400(0.707) - 1200(0.707) - 1600(0.866) + 1400(0.500) \\ &= 162.8 \text{ kN} \\ R_y &= 2400\sin45^\circ + 1200\sin45^\circ + 1600\sin30^\circ + 1400\sin60^\circ \\ &= 2400(0.707) + 1200(0.707) + 1600(0.500) + 1400(0.866) \\ &= 4558 \text{ kN} \end{aligned}$$

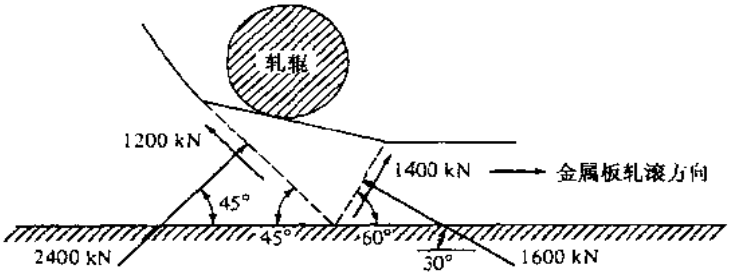


图 1-12

故 $$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(162.8)^2 + (4558)^2} = 4561 \text{ kN}$$

由图 1-13,所求的 $\theta = \arctan(4558/162.8) = 87.95°$

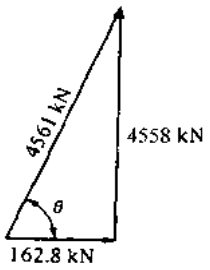


图 1-13

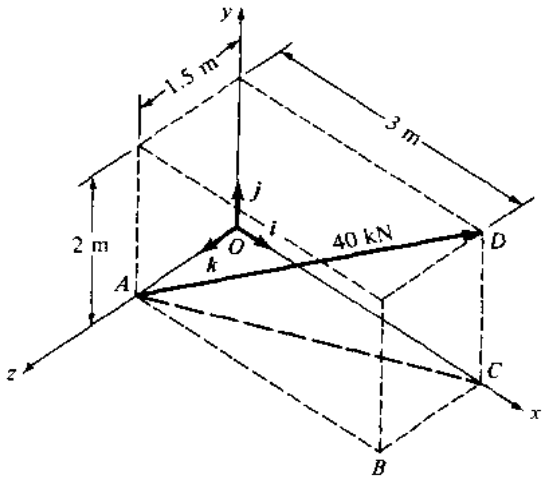


图 1-14

1.3 求图 1-14 所示 40 kN 力在 x,y 和 z 方向的分量.

解 有向线段 $\boldsymbol{AD}$ 在 x,y 和 z 方向的分量分别为 3 m,2 m 和 − 1.5 m. 从 A 到 D 的距离为

$$|\boldsymbol{AD}| = \sqrt{(3)^2 + (2)^2 + (-1.5)^2} = 3.095 \text{ m}$$

于是矢量 $\boldsymbol{AD}$ 可以写成分量形式:

$$\boldsymbol{AD} = \frac{3}{3.905}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3.905}\boldsymbol{j} + \frac{-1.5}{3.905}\boldsymbol{k}$$
$$= 0.768\boldsymbol{i} + 0.512\boldsymbol{j} - 0.384\boldsymbol{k}$$

力矢量 $\boldsymbol{V}$ 与 $\boldsymbol{AD}$ 的区别仅在大小上,所以

$$\boldsymbol{V} = 0.768(40)\boldsymbol{i} + 0.512(40)\boldsymbol{j} - 0.384(40)\boldsymbol{k}$$
$$= 30.72\boldsymbol{i} + 20.48\boldsymbol{j} - 15.36\boldsymbol{k}$$

40 kN 力在 x,y 和 z 方向的分量分别为 30.72 kN,20.48 kN 和 15.36 kN. 我们可以验算:

$$\sqrt{(30.72)^2 + (20.48)^2 + (-15.36)^2}$$
$$= \sqrt{1599.08} \approx 40$$

40 kN 力的方向余弦为 0.768,0.512 和 − 0.384.

1.4 求题 1.3 中 40 kN 力在 xz 平面上的投影.

解 AC 的长度为

$$AC = \sqrt{(1.5)^2 + (3)^2} = 3.35 \text{ m}$$

故 40 kN 力的投影为

$$F_z = 40\,\frac{3.35}{3.905} = 34.31\ \text{kN}$$

1.5　求图 1-15 所示 100 kN·m 矩矢量在 x，y 和 z 方向的分量

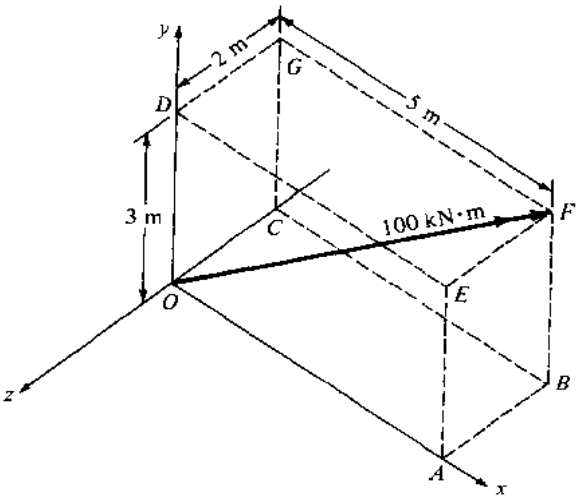


图 1-15

解　有向线段 $\boldsymbol{OF}$ 在 x，y 和 z 方向的分量分别为 5，3 或 -2，从 O 到 F 的距离为

$$|\boldsymbol{OF}| = \sqrt{(5)^2 + (3)^2 + (-2)^2} = 6.16\ \text{m}$$

$\boldsymbol{OF}$ 的方向余弦为

$$\frac{5}{6.16} = 0.812 \quad \frac{3}{6.16} = 0.487 \quad \frac{-2}{6.16} = -0.325$$

则 100 kN·m 矩矢量 $\boldsymbol{M}$ 可表示成

$$\boldsymbol{M} = (0.812)(100)\boldsymbol{i} + (0.487)(100)\boldsymbol{j} + (-0.325)(100)\boldsymbol{k}$$
$$= 81.2\boldsymbol{i} + 48.7\boldsymbol{j} - 32.5\boldsymbol{k}$$

其分量为

$$M_x = 81.2\ \text{kN·m} \quad M_y = 48.7\ \text{kN·m} \quad M_z = -32.5\ \text{kN·m}$$

1.6　在题 1.1 中，求缆索①中每一根钢缆的拉力对桥面塔杆底部之矩.

解　欲应用伐里农定理，则要用 x 和 y 方向的分量替代钢缆的拉力

$$F_x = 6\,000\,000\,\frac{547}{582.4} = 5\,635\,000\ \text{lb}$$

$$F_y = 6\,000\,000\,\frac{200}{582.4} = 2\,060\,000\ \text{lb}$$

一定要注意，须将两个分量置于 6 000 000 lb 力的作用线上同一点. 我们现在选择该点为塔杆的顶点 A，如图 1-16 所示. 故拉力对 O 点之矩等于其分量对同一点之矩的和.

$$|\boldsymbol{M}| = (5\,635\,000\ \text{lb})(200\ \text{ft}) + (2\,060\,000\ \text{lb})(0\ \text{ft})$$

等号右边最后一项为零，因为 F_y 通过取矩点. 所求之矩为

$$|\boldsymbol{M}_0| = 11\,270 \times 10^5\ \text{lb·ft}$$

1.7　利用点 O 到线 AB 的垂直距离解题 1.6.

解　如图 1-16 所示，欲求距离 d，可先求角 θ：

$$\theta = \arctan\frac{200}{547} = \arctan 0.3656 = 20.08^\circ$$

于是 $d = 547\sin\theta = 547\,(0.3434) = 187.8$ ft

由式(1.10)

$$M = Fd = (6\,000\,000\ \text{lb})(187.8\ \text{ft})$$
$$= 11\,279 \times 10^5 \text{lb} \cdot \text{ft}$$

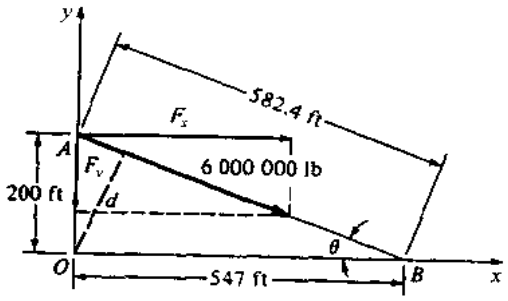


图 1-16

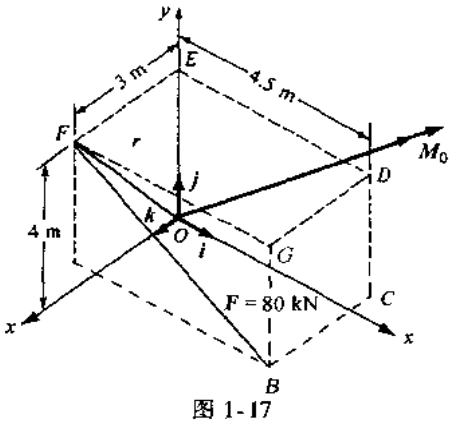


图 1-17

1.8　力 F 大小为 80 kN,求其对图 1-17 中坐标原点之矩.

解　首先须求力 F 的 x,y 和 z 分量.对角线 FB 的长度为 $\sqrt{(4)^2+(4.5)^2}=6.021$m.由图可知

$$F_z = 0 \qquad F_x = \frac{4.5}{6.021}80 = 59.79\ \text{kN} \qquad F_y = \frac{-4}{6.021}80 = -53.15\ \text{kN}$$

故 $\boldsymbol{F} = 59.79\,\boldsymbol{i} - 53.15\,\boldsymbol{j}$.

矢径 r 可以从原点 O 延伸到 80 kN 力 F 作用线上任取矩方便的点.我们选择点 F,该点相对 O 点来说,矢径表达式为 $\boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}$.由式(1.8)和(1.9)可得

$$\boldsymbol{M}_0 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 4 & 3 \\ 59.79 & -53.15 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (0 + 159.5)\boldsymbol{i} - (0 - 179.4)\boldsymbol{j} + (0 - 239.2)\boldsymbol{k}$$
$$= (159.4\boldsymbol{i} + 179.4\boldsymbol{j} - 239.2\boldsymbol{k})\text{kN} \cdot \text{m}$$

该力矩为一通过 O 点并垂直于 r 和 F 所在平面的矢量,如图 1-17 所示.同理,易求得 $|\boldsymbol{M}_0| = 338.9$ kN·m.

若图 1-17 虚线所示长方体在 O 点由球铰支撑,则力 F 将使长方体相对于和 M_0 重合的轴转动.

1.9　一电视发射塔包括三条管状支腿及水平杆和斜杆.塔由钢缆拉紧固定,如图 1-18 所示.

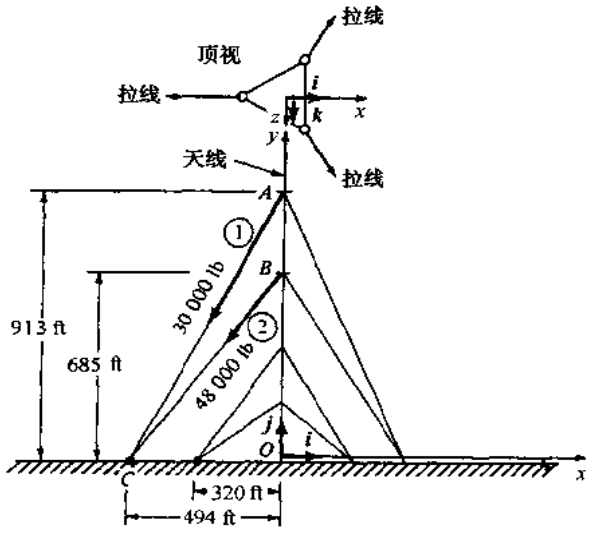


图 1-18

钢缆①中的拉力为 30 000 lb. 求此力相对于塔基 O 之矩.

解 ☞ AC 的长度可由直角三角形的关系求得，$AC=1\,038$ ft. 30 000 lb 力的作用线在 xy 平面内，其分量为

$$F_x=-\frac{494}{1038}30\,000=-14\,280\ \text{lb}$$
$$F_y=-\frac{913}{1038}30\,000=-26\,390\ \text{lb}$$
$$F_z=.0$$

故该力(记为 $\boldsymbol{F}$)可写成 $\boldsymbol{F}=(-14\,280\,\boldsymbol{i}-26\,390\,\boldsymbol{j})$ lb.

矢径 $\boldsymbol{r}$ 由 O 点指向 A 点，故 $\boldsymbol{r}=913$ ft. 由式(1.8)和(1.9)可得

$$\boldsymbol{M}_0=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 0 & 4 & 3\\ -14\,280 & -26\,390 & 0\end{vmatrix}$$
$$=(0+13\,038\,000)\boldsymbol{k}\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$

该力矩为一通过 O 点并沿 z 轴的矢量，从塔顶往下看，如图 1-19 所示.

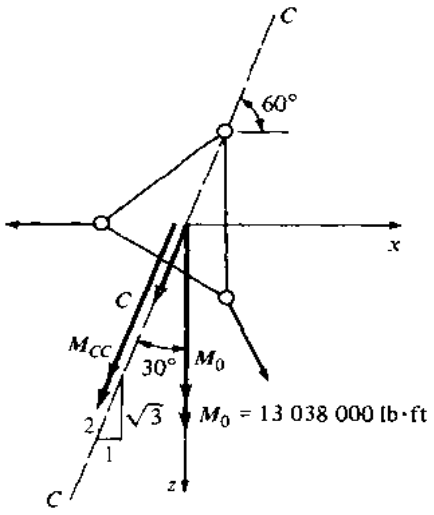


图 1-19

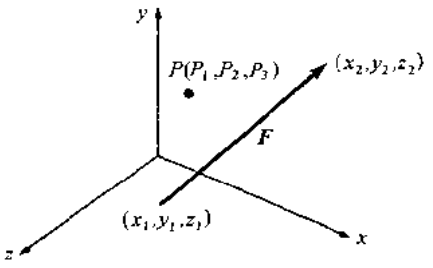


图 1-20

1.10　用 BASIC 语言编写一计算机程序求三维空间中的一个力对任意点之矩.

解 ☞ 将大小为 F 的力用一矢量表示，该矢量起点坐标为(x_1,y_1,z_1)，终点坐标为(x_2,y_2,z_2)，如图 1-20 所示. 取矩点 P 的坐标为(P_1,P_2,P_3).

该力对 P 点之矩可由式(1.9)求得，不过利用式(1.8)更方便. 下面的简单程序便可解方程求得力矩在 x，y 和 z 轴上的分量 M_1，M_2 和 M_3.

```
00100 REM * * * THIS PROGRAM DETERMINES THE MOMENT OF ANY GIVEN FORCE          * * *
00110 REM * * * IN SPACE ABOUT ANY GIVEN POINT P                               * * *
00120 REM
00130 REM * * *              READ IN DATA                                      * * *
00140 PRINT "ENTER THE MAGNITUDE OF THE FORCE"
00150 INPUT F
00160 PRINT "ENTER THE COORDINATES X1,Y1,Z1 OF FORCE"
00170 INPUT X1,Y1,Z1
00180 PRINT "ENTER THE COORDINATES X2,Y2,Z2 OF FORCE"
```

```
00190 INPUT X2,Y2,Z2
00200 PRINT "ENTER THE COORDINATES OF THE POINT P"
00210 INPUT P1,P2,P3
00220 REM
00230 REM * * * CALCULATE THE LENGTH OF VECTOR                    * * *
00240 REM
00250 LET L = SQR((X2 - X1) * * 2 + (Y2 - Y1) * * 2 + (Z2 - Z1) * * 2)
00260 REM
00270 REM * * * CALCULATE THE X,Y,AND Z COMPONENTS OF FORCE       * * *
00280 REM
00290 LET F1 = ((X2 - X1)/L) * F
00300 LET F2 = ((Y2 - Y1)/L) * F
00310 LET F3 = ((Z2 - Z1)/L) * F
00320 REM
00330 REM * * * CALCULATE MOMENT ABOUT THE POINT                  * * *
00340 REM
00350 LET M1 = ((Y1 - P2) * F3) - ((Z1 - P3) * F2)
00360 LET M2 = ((Z1 - P3) * F1) - ((X1 - P1) * F3)
00370 LET M3 = ((X1 - P1) * F2) - ((Y1 - P2) * F1)
00380 PRINT
00390 PRINT "MOMENT ABOUT THE POINT P"
00400 PRINT M1,M2,M3
00410 PRINT END
```

1.11 利用题 1.10 的程序重解例题 1.8.

解 ☞ 由图 1-17,力矢起点的坐标为(0,4,3),终点坐标为(4.5,0,3),取矩点 P 的坐标为(0,0,0).输入上述数据,得

```
ENTER THE MAGNITUDE OF THE PORCE
? 80
ENTER THE COORDINATES X1,Y1,Z1 OF FORCE
? 0,4,3
ENTER THE COORDINATES X2,Y2,Z2 OF FORCE
? 4.5,0,3
ENTER THE COORDINATES OF THE POINT P
? 0,0,0
MOMENT ABOUT THE POINT P
159.447      179.378      -239.171
```

上面最后一行的 3 个数据便是所求的力矩分别在 x,y 和 z 轴上的分量,与例题1.8解得的答案一致.

1.12 一个 250 kN 的力作用在一空盒的对角线上,如图1-21所示.求该力对底面对角线 EA 之矩.

解 ☞ 参阅图 1-7.该图中的轴 CC 对应于本题的线 EA.所求的力矩可由式(1.14)解得.式中行列式的第一行各元素是轴 CC 的方向余弦(或单位矢量 $\boldsymbol{C}$ 的方向余弦,两种说法实质是一致的).欲求图 1-21 中 EA 的方向余弦,必先确定它的长度应为12.37 m.这样,方向余弦为 12/12.37,0 和 −3/12.37;出现负号是因为从 E 移动到 A 是沿 z 轴的反向.

式(1.14)中行列式第二行各元素为取矩轴到力作用线位置矢量的坐标.为计算方便,选从 $E(0,0,3)$到 $C(0,4,0)$作为位置矢量,故第二行各元素为 0,4,−3.

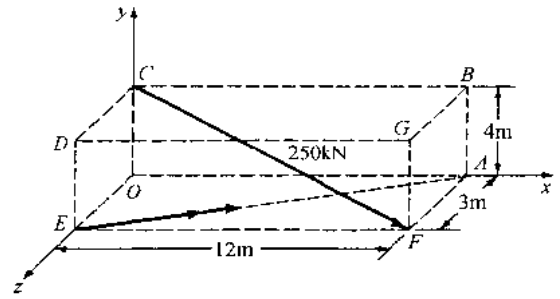


图 1-21

行列式最后一行各元素应是力在 x，y 和 z 轴上分量(即本题中 250 kN 力的分量)．由几何关系可知 $CF=13$ m，故该力在 x，y 和 z 轴的上分量分别为 250(12/13)，−250(4/13)和 250(3/13)．由式(1.14)，得

$$|\boldsymbol{M}_{EA}|=\begin{vmatrix} \dfrac{12}{12.37} & 0 & \dfrac{-3}{12.37} \\ 0 & 4 & -3 \\ 250\dfrac{12}{13} & -250\dfrac{4}{13} & 250\dfrac{3}{13} \end{vmatrix}=223.9\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

计算所得值为正值表明，若从点 E 向点 A 方向看，250 kN 的力将使盒子绕 EA 轴作顺时针转动．这一点与图 1-7 所示转动方向是一致的．在图 1-7 中，若沿 CC 轴看，力 $\boldsymbol{F}$ 将对 CC 轴产生逆时针转动效果．

1.13　在例题 1.9 的已知条件下，求 30 000 lb 力对图 1-19 中位于 xz 平面内的轴 C-C 之矩．

解　☞ 引入沿轴 C-C 的单位矢量 $\boldsymbol{C}$ 由几何关系可知，$\boldsymbol{C}=-0.5\boldsymbol{i}+0.866\boldsymbol{k}$．

由式(1.14)及题 1.9 中力 $\boldsymbol{F}$ 的分量表示法，得

$$|\boldsymbol{M}_{CC}|=\begin{vmatrix} -0.5 & 0 & 0.866 \\ 0 & 913 & 0 \\ -14280 & -26390 & 0 \end{vmatrix}=(0.866)(0+13\,038\,000)=11\,291\,000\ \text{lb}\cdot\text{ft}$$

从图 1-19 可知，M_{CC} 仅是 $\boldsymbol{M}_0$ 在 C-C 方向上的分量，即 $|\boldsymbol{M}_0|\cos30^\circ=|\boldsymbol{M}_{CC}|$，故上述答案是显然的．力矩矢量 $\boldsymbol{M}_{CC}$ 在图 1-19 中标出．

1.14　用 BASIC 语言编写一计算机程序求三维空间的力对任意轴之矩．

解　☞ 设大小为 F 的力由一矢量表示，该矢量起点坐标为 (x_1,y_1,z_1)，终点坐标为 (x_2,y_2,z_2)，如图 1-22 所示．要求的就是该力对 C-C 轴之力矩．

设点 $P(P_1,P_2,P_3)$ 为 C-C 上的任一点，点 $Q(Q_1,Q_2,Q_3)$ 为 C-C 上另一点．力 $\boldsymbol{F}$ 对 C-C 之矩可由式(1.14)解得．该方程可用下面程序来解，得到所求力矩的分量 M_x，M_y 和 M_z．

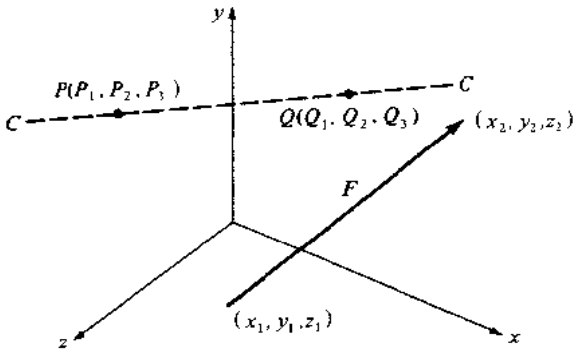


图 1-22

```
00100 REM * * *  THIS PROGRAM DETERMINES THE MOMENT OF ANY GIVEN FORCE     * * *
00110 REM * * *  IN SPACE ABOUT ANY GIVEN LINE 'PQ'                        * * *
00120 REM
00130 REM * * *              READ IN DATA                                  * * *
00140 REM
00150 PRINT "ENTER THE MAGNITUDE OF THE FORCE"
00160 INPUT F
00170 PRINT "ENTER THE COORDINATES X1,Y1,Z1 OF FORCE"
00180 INPUT X1,Y1,Z1
00190 PRINT "ENTER THE COORDINATES X2,Y2,Z2 OF FORCE"
00200 INPUT X2,Y2,Z2
00210 PRINT "ENTER THE COORDINATES OF THE POINT P"
00220 INPUT P1,P2,P3
00230 PRINT "ENTER THE COORDINATES OF THE POINT Q"
00240 INPUT Q1,Q2,Q3
00250 REM
00260 REM * * *  CALCULATE THE LENGTH OF VECTOR                            * * *
00270 REM
00280 LET L = SQR((X2 - X1) * * 2 + (Y2 - Y1) * * 2 + (Z2 - Z1) * * 2)
00290 REM
00300 REM * * *  CALCULATE THE X,Y,AND Z COMPONENTS OF FORCE               * * *
00310 LET F1 = ((X2 - X1)/L) * F
00320 LET F2 = ((Y2 - Y1)/L) * F
00330 LET F3 = ((Z2 - Z1)/L) * F
00340 REM
00350 REM * * *  CALCULATE THE COMPONENTS OF VECTOR QP                     * * *
00360 REM
00370 LET L1 = P1 - Q1
00380 LET L2 = P2 - Q2
00390 LET L3 = P3 - Q3
00400 REM
00410 REM * * *  CALCULATE THE COMPONENTS OF UNIT VECTOR E-QP              * * *
00420 REM
00430 LET E = SQR((L1 * * 2) + (L2 * * 2) + (L3 * * 2))
00440 LET E1 = L1/E
00450 LET E2 = L2/E
00460 LET E3 = L3/E
00470 REM
00480 REM * * *  CALCULATE MOMENT ABOUT THE POINT                          * * *
00490 REM
00500 LET M1 = ((Y1 - P2) * F3) - ((Z1 - P3) * F2)
00510 LET M2 = ((Z1 - P3) * F1) - ((X1 - P1) * F3)
00520 LET M3 = ((X1 - P1) * F2) - ((Y1 - P2) * F1)
00530 LET M4 = (M1 * E1) + (M2 * E2) + (M3 * E3)
00540 LET M5 = M4 * E1
00550 LET M6 = M4 * E2
00560 LET M7 = M4 * E3
00570 PRINT
00580 PRINT "MOMENT ABOUT THE LINE PQ"
```

```
00590 PRINT M5,M6,M7
00600 END
```

1.15　利用例题 1.14 的程序重解题 1.12.

解　见图 1-21,选择 C 和 F 两点分别作为力矢的起点和终点.所以$(x_1,y_1,z_1)=(0,4,0)$及$(x_2,y_2,z_2)=(12,0,3)$选择 E 和 A 作为取矩轴 EA 上任选的两点.所以$(P_1,P_2,P_3)=(0,0,3)$及$(Q_1,Q_2,Q_3)=(12,0,0)$.例题 1.14 中的程序输出如下结果:

```
ENTER THE MAGNITUDE OF THE FORCE
? 250
ENTER THE COORDINATES X1,Y1,Z1 OF FORCE
? 0,4,0
ENTER THE COORDINATES X2,Y2,Z2 OF FORCE
? 12,0,3
ENTER THE COORDINATES OF THE POINT P
? 0,0,3
ENTER THE COORDINATES OF THE POINT Q
? 12,0,0
MOMENT ABOUT THE LINE PQ
217.195      0          -54.2986
```

故所求之矩的分量为 $M_x=217.2\ \text{kN}\cdot\text{m}$, $M_y=0$, $M_z=-54.3\ \text{kN}\cdot\text{m}$.由此可得

$$|\boldsymbol{M}_{EA}|=\sqrt{(217.2)^2+0^2+(-54.3)^2}=223.9\ \text{kN}\cdot\text{m}.$$

与题 1.12 所得结果一致.

1.16　求图 1-23 所示力偶矩.两个力都在斜面上.

解　对力偶中任一力的作用线上任一点取矩,得

$$|\boldsymbol{M}|=(2\ \text{kN})(3\ \text{m})=6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

力偶矩的矢量表示法遵循右手螺旋法则.该矢量垂直于斜面 AB,在图 1-23 中用虚线双箭头表示.

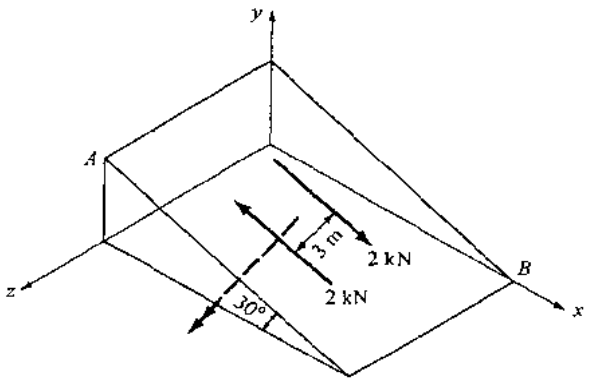


图 1-23

1.17　一钢筋混凝土梁在两力偶作用下进行断裂试验.当其中一力偶达到 452 kN·m,同时与之垂直的另一力偶达到 172 kN·m 时(见图 1-24),梁出现裂纹.求这两个力偶之和.

解　如图 1-25 所示,将表示两力偶的矢量相加,

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(172)^2 + (452)^2} = 483.6\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

$$\theta = \arctan\frac{172}{452} = 20.8^\circ$$

故两力偶之和为一力偶，其大小等于 483.6 kN·m，方向与梁的横截面成 20.8°角.

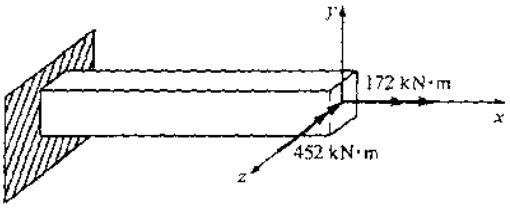


图 1-24

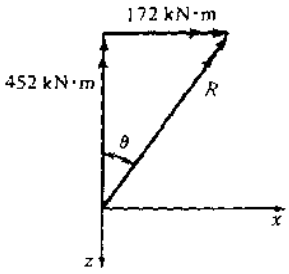


图 1-25

1.18　求图 1-26 所示 4 个共点力的合力.

解　设合力为 $\boldsymbol{R}$，其分量为

$$\begin{aligned} R_x &= -9\cos30^\circ - 15\cos45^\circ + 6\cos60^\circ + 4\sin30^\circ \\ &= -7.79 - 10.61 + 3 + 2 \\ &= -13.40\ \text{kN} \\ R_y &= -9\sin30^\circ + 15\sin45^\circ + 6\sin60^\circ - 4\cos30^\circ \\ &= -4.50 + 10.61 + 5.20 - 3.46 \\ &= 7.85\ \text{kN} \end{aligned}$$

故　　$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(-13.40)^2 + (7.85)^2} = 15.53\ \text{kN}$$

合力方向为 $\theta = \arctan 7.85/13.40 = 30.4^\circ$，如图 1-27 所示.

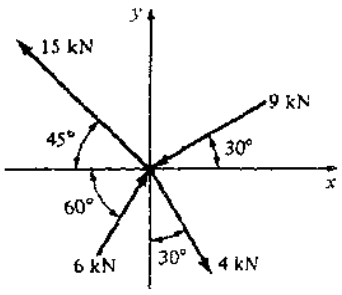


图 1-26

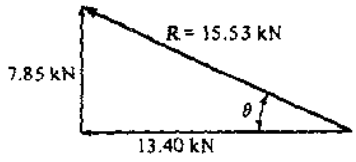


图 1-27

1.19　如图 1-28 所示，求作用在梁 AB 上的 4 个平行力的合力.

解　设合力为 $\boldsymbol{R}$，很明显，该力是一垂直方向的力. 以向上作用的力为正，将各力相加，得

$$\boldsymbol{R} = -20 - 30 + 20 - 15 = -45\ \text{kN}$$

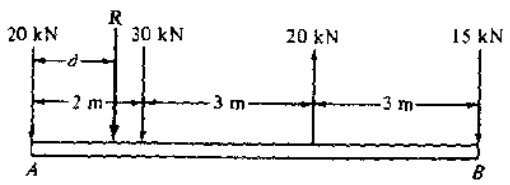


图 1-28

现在来确定合力 $\boldsymbol{R}$ 的作用线位置.为取矩方便,就选 A 点作为取矩点.伐里农定理告诉我们,合力对 A 点之矩等于力系中各个力对同一点之矩的和.设合力 $\boldsymbol{R}$ 到 A 点的距离为 d,以顺时针转动为正,得

$$(45\ \text{kN})(d) = (30\text{kN})(2\text{m}) - (20\text{kN})(5\text{m}) + (15\text{kN})(8\text{m}) = 80\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

由此得 $d = 1.778$ m.故合力为一向下作用的力,大小 45 kN,A 点到作用线距离为 1.778 m.

1.20　如图 1-29 所示,求作用在梁 AB 上的 4 个平行力的合力.

解　☞ 将各力在垂直方向相加,得

$$\boldsymbol{R} = -30 - 10 + 20 + 20 - 0$$

合力为零,说明合力不是一个力,但给定的力系仍可产生转动效果.在本题的情况下,合力为一力偶.选取一方便的矩心点,例如 A 点,以相对于点 A 的顺时针转动为正,得

$$\boldsymbol{M}_A = (10\text{kN})(3\text{m}) - (20\text{kN})(6\text{m}) - (20\text{kN})(10\text{m}) = -290\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

所以给定的力系是一逆时针力偶,大小等于 290 kN·m.

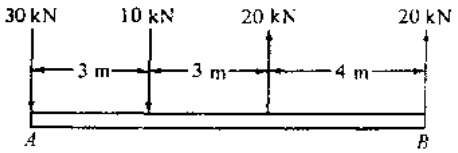


图 1-29

1.21　如图 1-30 所示,求由两个力和一力偶组成的力系的合力.

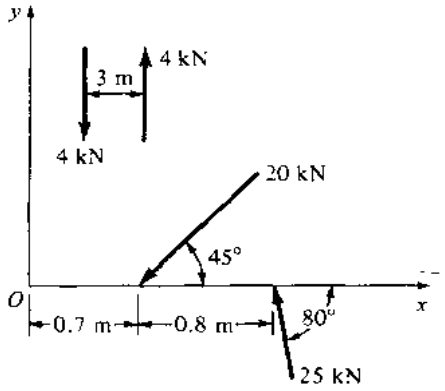


图 1-30

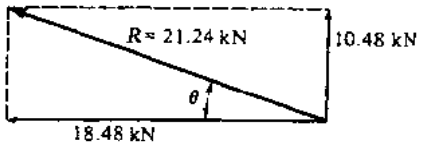


图 1-31

解　☞ 将各力的水平分量和垂直分量相加,注意,力偶在任何方向均不产生力的效应.

$$R_x = -20\cos45^\circ - 25\cos80^\circ = -18.48\ \text{kN}$$

$$R_y = -20\sin45^\circ - 25\sin80^\circ = 10.48\ \text{kN}$$

故

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(-18.48)^2 + (10.48)^2} = 21.24\ \text{kN}$$

如图 1-31 所示,合力 $\boldsymbol{R}$ 的作用线夹角 $\theta = \arctan(10.48/18.48) = 29.56^\circ$

现在来确定在图 1-30 所示坐标系内合力 $\boldsymbol{R}$ 作用线的位置.根据伐里农定理,合力 $\boldsymbol{R}$ 对任一点(如 O 点)之矩必等于原力系中各力和力偶对 O 点之矩的和,据此可写出力矩方程.首先将 20 kN 和 25 kN 的力分解成 x 和 y 方向的分量,如图 1-32 中虚线所示.注意,要将每个力的分量置于该力作用线上的同一点.设合力 $\boldsymbol{R}$(如图 1-32 中实线所示)到 O 点距离为 d.

取逆时针方向为正,得

$$21.24\,d = -(14.14\text{kN})(0.7\text{m}) + (24.62\text{kN})(1.5\text{m}) + 12\text{kN}\cdot\text{m}$$

由上式解出 $d = 1.838$ m.由于 d 最终解得是正值,故知前面假设 $\boldsymbol{R}$ 的位置是正确的.如果 $\boldsymbol{R}$ 一开始设成如图 1-33 所示的错误位置,则由力矩方程求得的 d 应为负值.

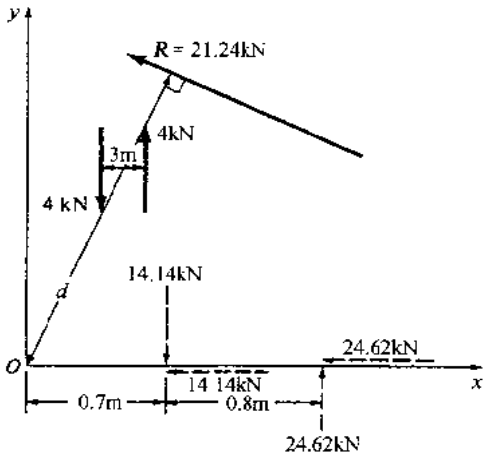


图 1-32

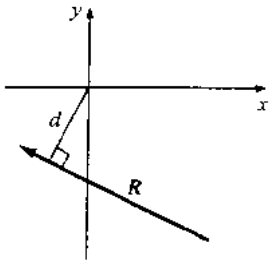


图 1-33

1.22　一座大致是长方体结构的建筑物高 60 m，如图 1-34 所示. 水平方向风力对建筑物施加载荷，在垂直墙面上产生压力，该力在三层楼房的每一层视为均匀分布. 分布情况见下表：

距地面高度 (m)	预计风速 (m/s)	压力 (N/m^2)
0—20	35.7	781
20—40	45.4	1264
40—60	49.9	1530

求预计作用在建筑物墙面上水平风力的合力.

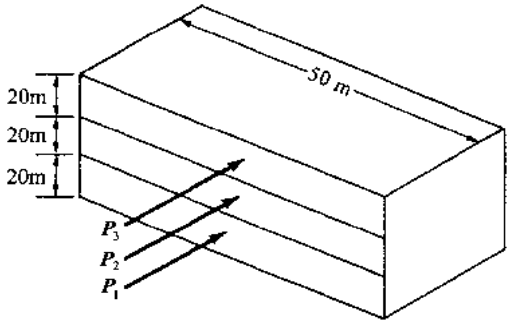


图 1-34

解　据题意可知

$$|\boldsymbol{P}_1| = (20\text{m})(50\text{m})(781\text{N/m}^2) = 781\ \text{kN}$$

$$|\boldsymbol{P}_2| = (20\text{m})(50\text{m})(1264\text{N/m}^2) = 1264\ \text{kN}$$

$$|\boldsymbol{P}_3| = (20\text{m})(50\text{m})(1530\text{N/m}^2) = 1530\ \text{kN}$$

认为上述三个力都作用在每一层楼的中点上，如图 1-35 所示. 于是合力为

$$|\boldsymbol{R}| = 781 + 1264 + 1530 - 3575\ \text{kN}$$

利用伐里农定理确定合力的作用线：合力 $\boldsymbol{R}$ 对任一点（如 O 点）之矩等于这三个力对同一点之矩的

和.所以

$$780(10) + 1264(30) + 1530(50) = 3575\,d$$

解得 $d = 34.19$ m.

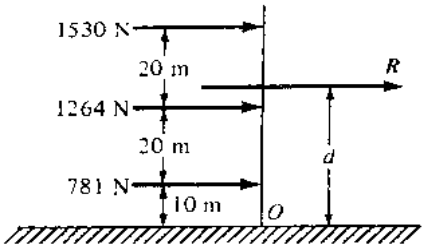


图 1-35

1.23 作用于舱壁的水压力及其自身重量如图 1-36 所示.求图示 4 个给定力的合力.

解 ☞ 将所有力的水平分量和垂直分量相加,得

$$R_x = -7\,500 \text{ lb}$$

$$R_y = -3\,500 - 14\,000 - 2\,200 = -19\,700 \text{ lb}$$

所以

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(-7\,500)^2 + (-19\,700)^2} = 21\,080 \text{ lb}$$

由图 1-37 可知,$\theta = \arctan(19\,700/7\,500) = 69\,16°$.

合力 $\boldsymbol{R}$ 对任一点之矩必等于这 4 个给定的力对同一点矩的和.选 A 点为取矩点,并规定逆时针方向为正,有

$$21\,080\,d = (7\,500 \text{ lb})(7.5 \text{ ft}) + (14\,000 \text{ lb})(3 \text{ ft}) + (35\,000 \text{ lb})(6 \text{ ft}) + (2\,200 \text{ lb})(4.5 \text{ ft})$$

解得 $d = 6.125$ ft.

所以合力的大小为 21 080 lb,方向向下偏左,与水平线成 69.16°,其作用线距 A 点 6.125 ft.

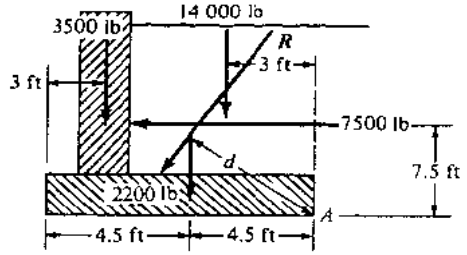


图 1-36

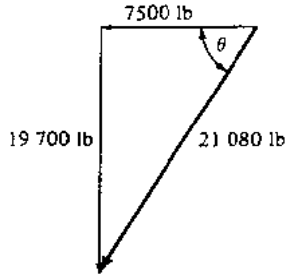


图 1-37

1.24 为美国空间计划而设计的可伸缩二维框架由铰链连接.其典型的模式如图 1-38 所示:点 A 位于假设的正方体边框中心,点 B,C 和 D 分别位于正方体的中点①.若 AC 承受拉力 25 kN,AB 的拉力为 40 kN,AD 的拉力为 15 kN,求作用于 A 点的合力.

解 ☞ 力系的分布如图 1-39 所示,以分量形式表示为

$$\boldsymbol{AC} = 25(0.707\,\boldsymbol{j} - 0.707\,\boldsymbol{k})\text{kN}$$

$$\boldsymbol{AB} = 40(-0.707\,\boldsymbol{i} + 0.707\,\boldsymbol{k})\text{kN}$$

$$\boldsymbol{AD} = 15(0.707\,\boldsymbol{i} - 0.707\,\boldsymbol{j})\text{kN}$$

上述各力相加即得合力

$$\boldsymbol{R} = [(-40 + 15)0.707\,\boldsymbol{i} + (25 - 15)0.707\,\boldsymbol{j} + (-25 + 40)0.707\,\boldsymbol{k}]$$

① 摘自机械工程(Mechanical Engineering),1975,7,49 页.

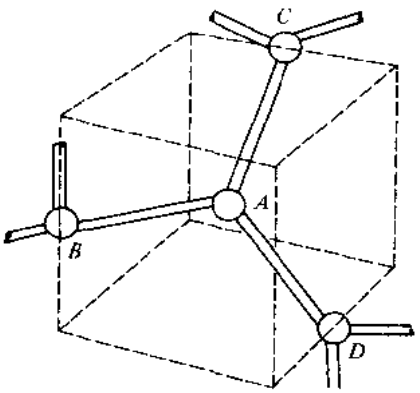


图 1-38

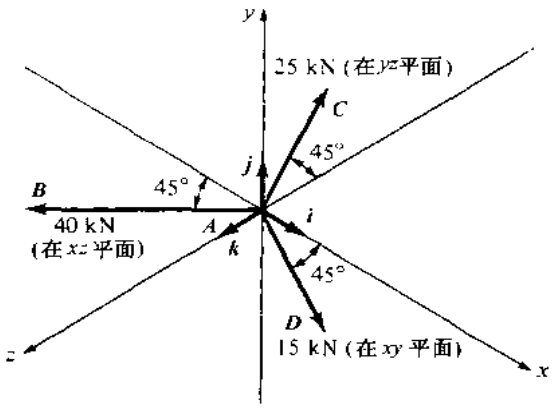


图 1-39

$$= -(-17.68\,\boldsymbol{i} + 7.07\boldsymbol{j} + 10.6\boldsymbol{k})\ \text{kN}$$

合力大小为

$$|\boldsymbol{R}| = \sqrt{(-17.68)^2 + (7.07)^2 + (10.6)^2}$$
$$= 21.78\ \text{kN}$$

合力的方向余弦为

$$\cos\theta_x = \frac{17.68}{21.78} = 0.812 \quad \cos\theta_y = \frac{7.07}{21.78} = 0.325 \quad \cos\theta_z = \frac{10.6}{21.78} = 0.487$$

方向余弦的平方和必等于 1,故可用来检验计算是否正确$(0.812)^2 + (0.325)^2 + (0.487)^2 = 1$.

补 充 习 题

1.25　一条船正在铺设海底通讯电缆.由于受已从电缆卷盘上解开电缆的拖拉,电缆对船上卷盘的拉力为 8 000 lb.若电缆以与水平面成 35°角的方向离船进入水中,求电缆作用于船的力水平分量和垂直分量.

答案:$F_H = 6\,553$ lb;$F_V = 4\,589$ lb

1.26　登月车上配备有一个表面采样系统,借助于一个小铲斗能挖掘月球表面岩层.铲斗可转动以便将样品堆积到一个容器内,如图 1-40①所示.若活动带上的水平力为 350 N,螺旋弹簧通过与铲斗连接的杆施加的压力为 100 N,求通过传动机构作用于铲斗的合力.

答案:288 N,与水平成 14.2°

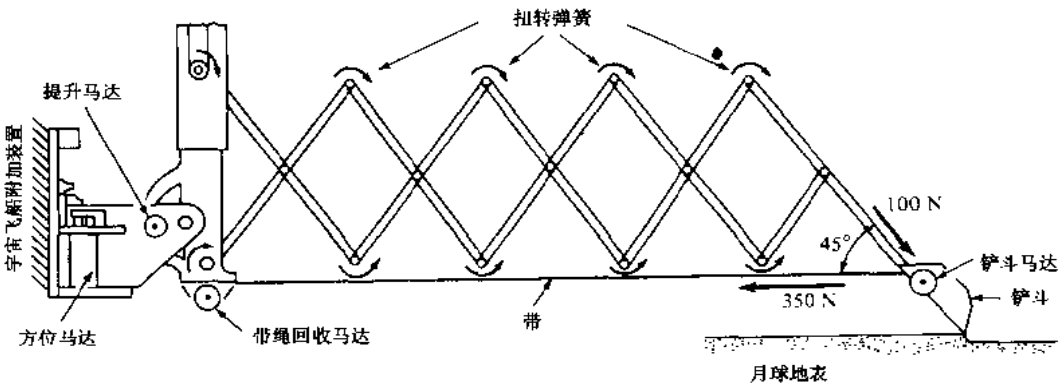


图 1-40

① 引自 JPL 空间计划总结 37—43,卷Ⅵ,第 5 页,承蒙加州理工学院(Pasadena,California)喷气推进实验室许可.

1.27　在设计能承受飓风的结构时，将所谓风的"运动速度"(图 1-41 中的矢量 C)分解为切向分量 T 和径向分量 R 是比较方便的．若切向速度为 75 m/s，径向速度为30 m/s，两矢量夹角为 135°，求运动速度 C．

答案：98.5 m/s

1.28　8 kN 的力作用如图 1-42 所示．求该力的 x，y 和 z 分量．

答案：$F_x=4.899$ kN；$F_y=5.657$ kN；$F_z=2.892$ kN

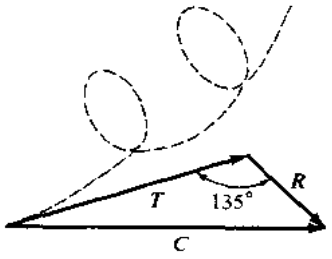


图 1-41

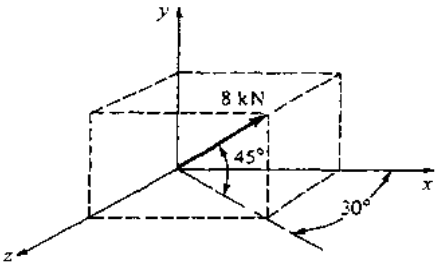


图 1-42

1.29　在题 1.27 中，我们来考虑飓风作用的二维效果．与实际情况更为接近的是增加一个垂直速度(见图 1-43)在某一场飓风中，距"风眼"100 ft 的地方切向速度 130 mi/h，径向速度 100 mi/h 求合速度．

答案：203 mi/h($\cos\theta_x=0.640$，$\cos\theta_y=0.492$，$\cos\theta_z=0.5911$)

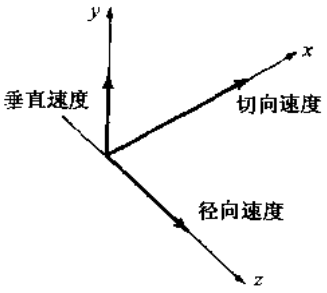


图 1-43

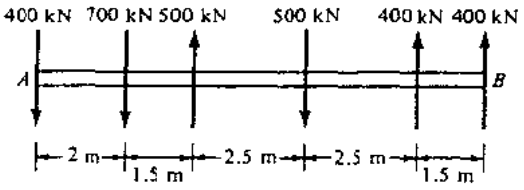


图 1-44

1.30　求图 1-44 所示作用在杆 AB 上 6 个平行力的合力．

答案：300 kN，作用向下，在 A 点左面 15.83 m 处

1.31　求图 1-45 所示作用于杆 AB 上 4 个平行力的合力．

答案：1200 kN·m，顺时针力偶

1.32　求图 1-46 所示两个力和一个力偶组成的力系的合力．

答案：合力为 440 lb 的水平力，作用在 A 点下方 3.36 ft 处，指向左侧

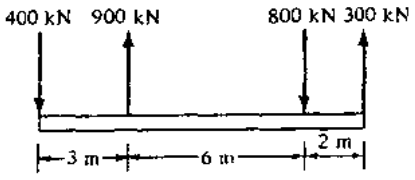


图 1-45

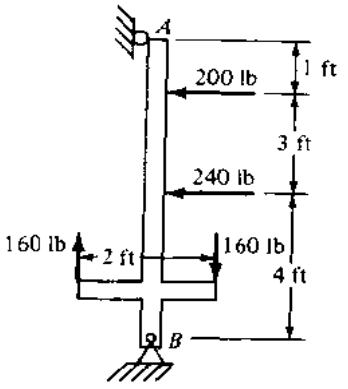


图 1-46

1.33　求图 1-47 所示矢量 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 的叉积 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$.

答案：$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=15\boldsymbol{j}-10\boldsymbol{k}$；$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=18.03$，方向余弦为 0，0.832，−0.555

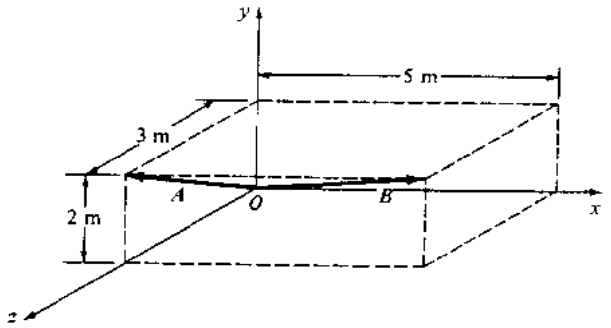


图 1-47

1.34　一个 24 000 lb 的力作用在一梁上，如图 1-48 所示. 求该力对过 A 点并垂直于纸面的轴之矩.

答案：233 100 lb·ft

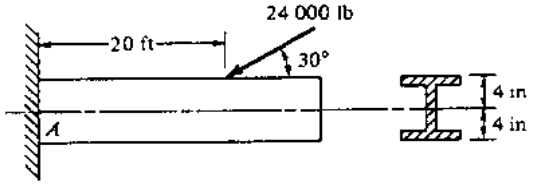


图 1-48

1.35　求图 1-49 中 160 kN 的力对坐标原点之矩.

答案：$\boldsymbol{M}_0=-19.4\boldsymbol{i}+84.8\boldsymbol{j}+99.4\boldsymbol{k}$；$|\boldsymbol{M}_0|=132.1$ kN·m

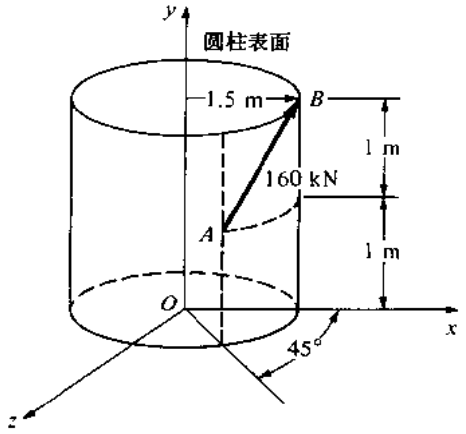


图 1-49

1.36　在题 1.35 中，求 160 kN 力对 x 轴之矩.

答案：$-179.4\boldsymbol{i}$ kN·m

1.37　在例题 1.9 中，钢缆②的拉力为 48 000 lb. (a)求该力对塔基 O 之矩；(b)求该力对图 1 9 中轴 C-C 之矩.

答案：(a) 19 220 000 lb·ft；(b)16 660 000 lb·ft

1.38　有一大小为 150 kN 的力. 其力矢的起点为(2,0,3)，终点为(0,6,0)，坐标单位为米. 利用例题 1.10 中的程序求该力对点(0,6,3)之矩.

答案：$(385.7\boldsymbol{i}+128.6\boldsymbol{j})$ kN·m

1.39　利用例题 1.14 中的程序，求例题 1.12 中 250 kN 的力对对角线 DB 之矩.

答案：$M_x=-217.2$ kN·m；　$M_y=0$；　$M_z=54.3$ kN·m

1.40　求例题 1.12 中 250 kN 的力对过 OE 边的中点且与 y 轴平行的轴之矩.

答案：$M_x=0$；　$M_y=-346.2$ kN·m；　$M_z=0$

1.41　求例题 1.12 中 250 kN 的力对过 G 点和 CB 边中点的轴之矩.

答案：$M_x=184.6$ kN·m；　$M_y=0$；　$M_z=92.3$ kN·m

1.42　如图 1-50 所示，一刚体上作用有三个力偶.求该力系的合力.

答案：合力为 1 591 N·m 的力偶，方向余弦为 $\cos\theta_x=0.503$，$\cos\theta_y=-0.864$，$\cos\theta_z=0$

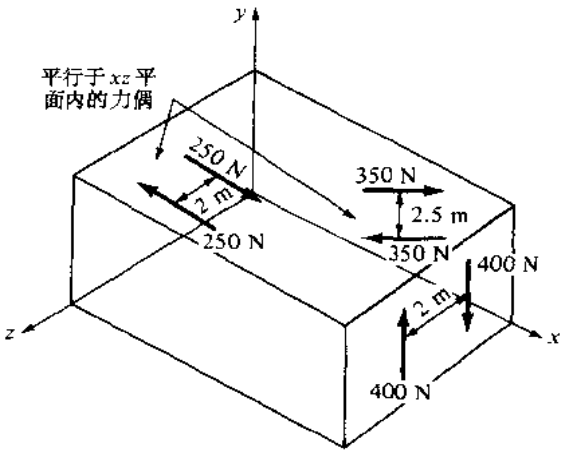


图 1-50

1.43　输电线以及矩形截面细长水平杆在风力作用下会在与风向垂直的方向上振动.若风速为 $\boldsymbol{V}_{\text{rel}}$，则作用于物体上的牵引力为

$$\boldsymbol{D}=\frac{1}{2}C_D\rho hLV_{\text{rel}}^2$$

举力为

$$\boldsymbol{L}=\frac{1}{2}C_L\rho hLV_{\text{rel}}^2$$

式中 C_D 和 C_L 为经验系数，ρ 是空气密度，h 是物体的深度，L 是物体的长度.风向与物体成角 $\alpha=\arctan(V_y/V)$，其中 V_y 是运动物体的垂直速度，V 是风速的水平分量，见图 1-51.求造成垂直振动的分量 F_y.

答案：$F_y=\frac{1}{2}\rho hLV^2(\sec^2\alpha)(C_D\sin\alpha+C_L\cos\alpha)$

1.44　刚性金属板承受 3 个集中力的作用，如图 1-52 所示.求该力系的合力.

答案：合力大小为 125 kN，作用点位于 $x=0.213$ m，$y=0.408$ m

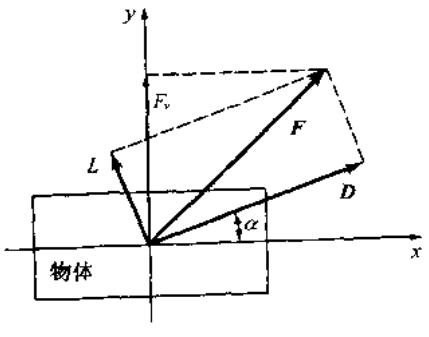


图 1-51

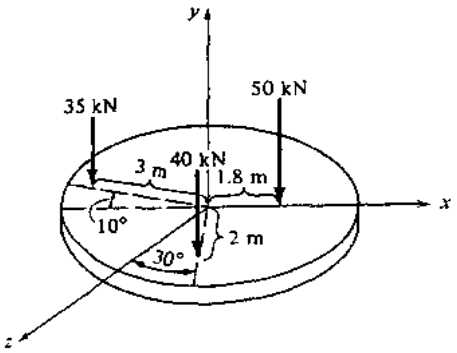


图 1-52

第二章　静力学：刚体的平衡

分离体图

一机构或一部件的分离体图是该机构或部件一张尺度近似的图，在图上标出所有直接作用其上的力和力偶矢量，这些作用或是与其表面相接触的物体施加的（称为表面力），或是重力、磁力以及其他在体内分布的力（称为体力）．未知的力（通常是约束反力）必须在已知约束处用矢量标明．

约束反力的标注

滚动圆柱约束反力

由于滚动圆柱的特性，在约束处只有一个作用于支点沿垂直方向的反力 $\boldsymbol{R}_A$，如图 2-1 所示（见例题 2.5 和 2.6）．这样的反作用力通常称为光滑表面约束反力．

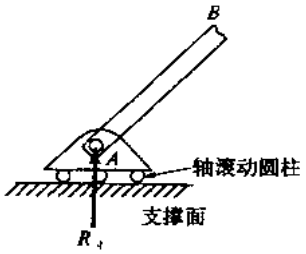


图 2-1

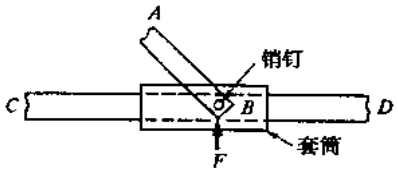


图 2-2

类似地，无摩擦杆 CD（图 2-2）上的套筒也只能向用销钉与其连接的杆件 AB 传递一个垂直于 CD 的力 $\boldsymbol{F}$．

圆柱铰链约束反力

用一个无摩擦销钉（或铰链）与支撑物体相连的构件 AB，只能承受从约束传来的一个力（不是力矩），如图 2-3 所示．传递到构件上的力通常用它的水平分量和垂直分量表示．所以，在铰接点，构件 AB 承受如图所示 $\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$ 两个力．

粗糙表面约束反力

一个与粗糙表面接触的构件 AB 承受两个约束反力分量 $\boldsymbol{A}_x$ 和 $\boldsymbol{A}_y$，如图 2-4 所示，恰如圆柱铰链约束．这两个约束反力分量分别称为约束反力的摩擦力分量和法向力分量，并且通常标为 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{N}$．

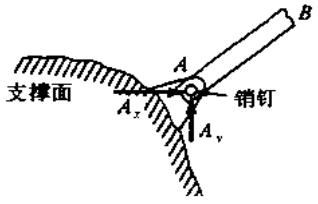


图 2-3

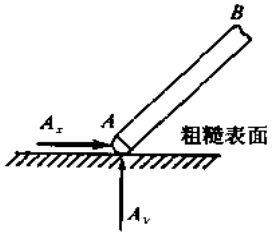


图 2-4

固定端约束反力

若构件 CD 承受力偶和力的作用，又与支撑物以这样一种方式连接：在连接处 C，构件既

不能平移也不能转动(即焊接在一起),如图 2-5 所示.则其承受的约束反力为水平分量 C_x 和垂直分量 C_y,还有一个防止其在支撑点发生转动的力矩 M_c,如图 2-6 所示.

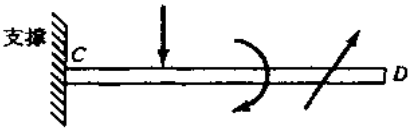


图 2-5

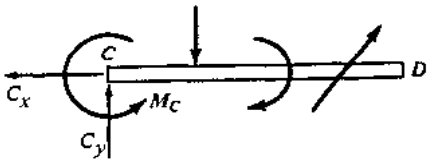


图 2-6

弹簧约束反力

有时,一承载构件 EF 与柔性构件 GH 相接触,GH 在接触点允许产生变形,如图 2-7 所示.在接触点,GH 对 EF 施加一弹簧类型的约束力 $F_{弹}$.构件 EF 的分离体图如图2-8所示(见例题 2.6).

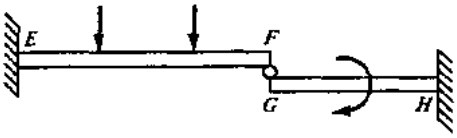


图 2-7

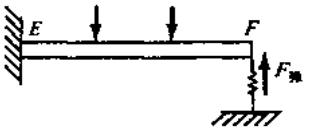


图 2-8

所需独立平衡方程的数目

对一个一般的空间力系来说,独立的平衡方程为

$$\sum \boldsymbol{F} = 0 \text{ 和 } \sum \boldsymbol{M}_0 = 0$$

或将矢量式写成沿 x,y 和 z 轴的分量形式

$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad \sum F_z = 0$$

$$\sum M_x = 0 \quad \sum M_y = 0 \quad \sum M_z = 0$$

一般的空间共点力系

这样的力系仅有 3 个独立平衡方程.这三个方程可以是力的平衡方程,也可以是力矩方程,或者是力的方程与力矩方程的任意组合.

一般的空间平行力系

这样的力系也只有 3 个独立的标量方程,或者写成一个矢量方程.

一般的平面力系

这样的力系有 3 个独立的标量平衡方程.标量解法通常最简单和最直接(见例题 2.5 和 2.10 至 2.12).

一般的平面平行力系

这样的力系有 2 个独立平衡方程:一个力的方程和一个力矩方程,或是 2 个力矩方程.标量解法通常最有效(见例题 2.6 至 2.8).

平面共点力系

这样的力系也只有 2 个独立平衡方程.最简单的解法是标量法(见例题 2.2、2.3 和2.4).

共线(一维)力系

在这种情况下,所有的力皆沿同一直线,只有一个平衡方程.标量方法最佳(见例题 2.9).

二力构件

共线力系的一个特殊情况是一个物体在两个力的作用下处于平衡,则这两个力必大小相

等、方向相反且沿同一作用线.这样的承载物体称为二力构件(见例题 2.1 和 2.4).

下面的例题中讨论受平面力系作用物体的平衡.空间力系将在第四章中讨论

例　题

2.1　一重物 W 由细绳 AB 和柔索 BCD 悬挂,BCD 又绕过一无摩擦滑轮 C,如图 2-9 所示.柔索 BCD 的末端连结一个 10 kN 重物,绳和索与垂线所夹之角在图上已标出.求绳 AB 的张力和 W 的重量.

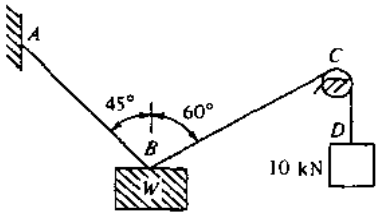


图 2-9

解　首先画滑轮的分离体图.将所有与之接触物体的作用力皆在图上标出,如图 2-10(b)所示.这些作用力包括滑轮轴上约束反力的水平和垂直分量以及柔索 BCD 施加的张力.由于滑轮无摩擦,故由重物产生的 10 kN 力在滑轮两侧保持不变,同时使 BC 段柔索的张力也为 10 kN,如图所示.

然后画重物 W 的分离体图,如图 2-10(a)所示.W 上作用有柔索 BC 的 10 kN 张力,未知张力 $\boldsymbol{T}_{AB}$ 及重力 $\boldsymbol{W}$(虽然最好先画滑轮的分离体图,但这两张图应放置适当以便互相参照).注意图上 x 轴和 y 轴正向所指方向.由 B 点的平衡,有

$$\sum F_x = 10\sin60^\circ - |\boldsymbol{T}_{AB}|\sin45^\circ = 0,\text{故}\ |\boldsymbol{T}_{AB}| = 12.2\ \text{kN}$$

及

$$\sum F_y = 12.2\cos45^\circ + 10\cos60^\circ - |\boldsymbol{W}| = 0,\text{故}\ |\boldsymbol{W}| = 13.6\ \text{kN}$$

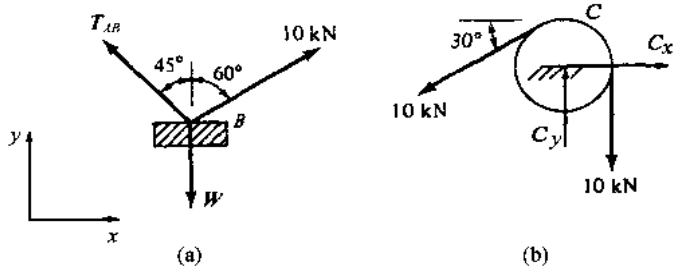


图 2-10

2.2　如图 2-11 所示,一圆柱形储液罐重 2000 N,在水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用下欲滚上一高 0.25 m 的台阶.求:当储液罐刚刚脱离与地面的接触点 A 时,力 $\boldsymbol{F}$ 的大小.

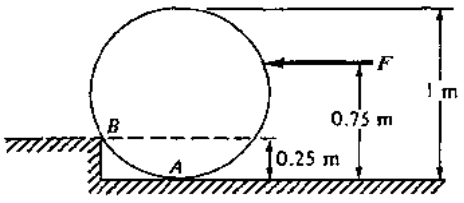


图 2-11

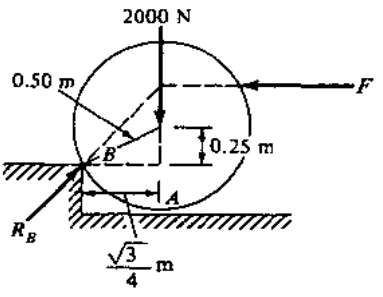


图 2-12

解　罐完整的分离体图如图 2-12 所示.注意,在三个非平行的力的作用下,其中包括 B 处的约束反力 $\boldsymbol{R}_B$ 使罐保持平衡.所以这三个力的作用线必相交于力系所在平面内的一公共点(否则力系将产生一不能平衡的力矩并引起加速运动).这就决定了约束反力 $\boldsymbol{R}_B$ 的方向.因为本题并不要求 B 处的约束反力,我们可以选点 B 为平衡方程的取矩点.以 $\sum M_B$ 表示对点 B 之矩的和并用符号 + ⟳ 表示以顺时针为力矩的正向,有

$$+\circlearrowleft \sum M_B = -0.50|\boldsymbol{F}| + 2000\frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

由上式解得$|\boldsymbol{F}| = 1732$ N.

2.3 三个相同的实心金属圆柱体(长皆为单位长度)堆码在一刚性箱内,如图 2-13 所示. 每个圆柱体重为 400 N. 求圆柱体相互接触点及圆柱体与箱壁接触点的作用力. 设所有接触面上都不存在摩擦.

解 首先画出顶上那个圆柱体的分离体图. $\boldsymbol{R}_1$ 为下面每个圆柱体作用于顶上圆柱体的力,这两个力均通过接触点并与水平成 45°角,如图 2-14 所示.

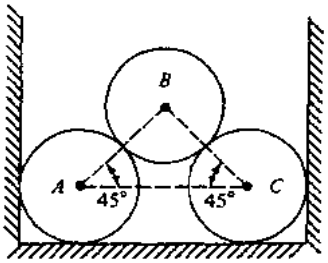


图 2-13

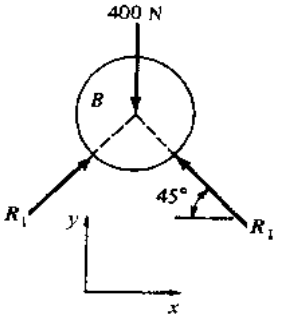


图 2-14

由平衡,得

$$\sum F_y = 2|\boldsymbol{R}_1|\sin 45° - 400 = 0$$

解上式,可知$|\boldsymbol{R}_1| = 283$ N. 注意,这两个力都用 $\boldsymbol{R}_1$ 表示,是利用了对称性并实际上利用了圆柱体 B 水平方向的平衡方程的结果.

现在可以画出左下方的圆柱体 A 的分离体图,该图如图 2-15 所示,图中 $\boldsymbol{R}_2$ 和 $\boldsymbol{R}_3$ 表示箱壁施加在圆柱体上的力. 由平衡,

$$\sum F_y = |\boldsymbol{R}_3| - 400 - 283\sin 45° = 0 \quad 或\ |\boldsymbol{R}_3| = 600\ \text{N}$$

$$\sum F_x = |\boldsymbol{R}_2| - 283\cos 45° = 0 \quad 或\ |\boldsymbol{R}_2| = 200\ \text{N}$$

圆柱体 C 的解法与 A 类似.

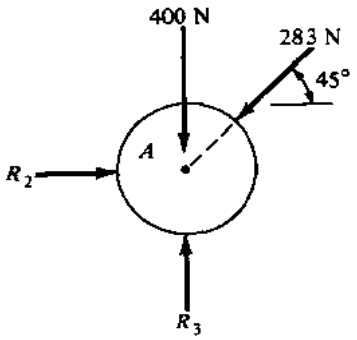


图 2-15

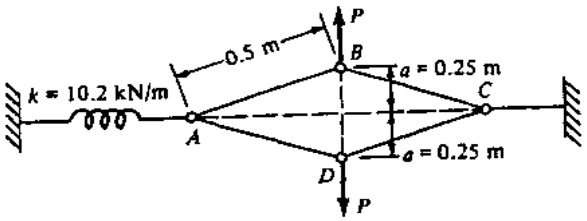


图 2-16

2.4 如图 2-16 所示,一四连杆机构 $ABCD$ 的左端通过一个弹簧与刚壁连结,其右端通过一刚性杆与右侧墙相连. 劲度系数为 10.2 kN/m,即弹簧伸长 1 m 须施加 10.2 kN 的力. 初始时 $a = 0$,所有的杆均在水平位置,弹簧张力为 200 N. 然后载荷 $\boldsymbol{P}$ 作用于 B、D 两处,使四根杆张开成如图所示形状. 求产生这样变形的力 $\boldsymbol{P}$.

解 当 $a = 0$ 时,弹簧伸长,超出未受载荷时的长度

$$\frac{200\ \text{N}}{10\,200\ \text{N/m}} = 0.0196\ \text{m}$$

当四连杆拉开到图示位置时，杆 AB 和 BC 的水平投影均为 $\sqrt{(0.5)^2-(0.25)^2}=0.433$ m. 故弹簧超出其未受载荷时的总长度为

$$0.0196+2(0.500-0.433)=0.1536\ \text{m}$$

根据弹簧总的伸长，其张力为

$$T=(0\ 1536\ \text{m})(10.2\ \text{kN/m})=1.567\ \text{kN}$$

现在可以画出铰链 A 的分离体图，如图 2-17 所示. 图中 T_1 是杆 AB 和 AD 的轴向力. 由平衡，得

$$\sum F_x=-1.567+2\,|\,T_1\,|\,\frac{\sqrt{3}}{2}=0$$

解出 $|T_1|=0.905$ kN.

最后画铰链 B 的分离体图，如图 2-18 所示. 由平衡，得

$$\sum F_y=|\,P\,|-2(0.905)\left(\frac{1}{2}\right)=0$$

解出 $|P|=0.905$ kN

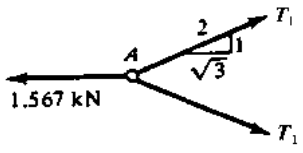


图 2-17

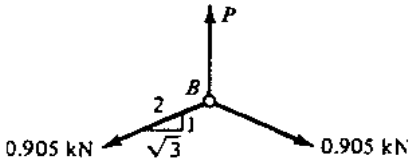


图 2-18

2.5　一简单的吊车如图 2-19 所示. 吊车正在起吊一个 8000 lb 的重物. 吊车固结在水平地基 AB 上，而地基的 A 端为圆柱铰链约束，B 端为光滑的滚动圆柱约束. 忽略吊车本身的重量，求 A、B 两端的约束反力.

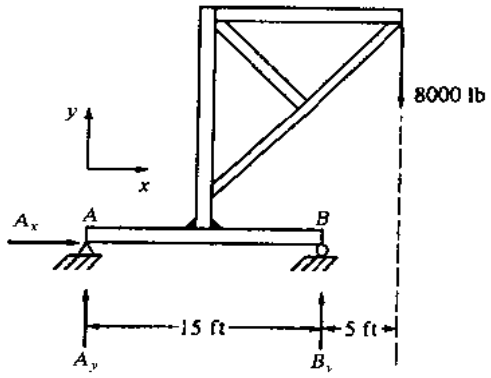


图 2-19

解　图 2-19 标出了所有可能作用于吊车和地基上的力(作为练习，最好标出圆柱铰链 A 的约束反力两个分量，尽管很明显可看出其中的水平分量为零). 由平衡，有

$$+\circlearrowright\ \sum M_A=8\,000(20)-15B_y=0$$

或 $B_y=10\,670$ lb

和 $$\sum F_y=A_y+10\,670-8\,000=0$$

或 $$A_y=-2\,670\ \text{lb}$$

同样 $$\sum F_x=A_x=0$$

2.6　如图 2-20 所示，水平刚性杆 AB 和 CD 分别承受图示的 2 kN 和 1 kN 垂直力的作用. A 端和 D 端为圆柱铰链约束，杆 CD 架在 E 处的光滑滚动圆柱上. B 端和 C 端通过另一个光滑圆柱相互作用，如图所示. 求 CD 杆右端的约束反力.

解　光滑滚动圆柱约束只能对刚性杆施加法向力. 由于这些力都在垂直方向，同时作用的载荷也在垂直方向，所以 A 端和 D 端圆柱铰链约束提供的反作用力也必定只在垂直方向，尽管每个这样

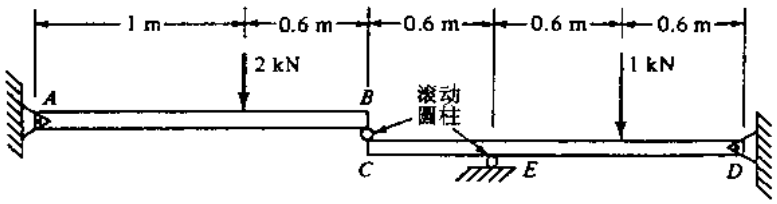


图 2-20

的约束能够提供水平和垂直方向两个分量.故两根杆的分离体图如图 2-21 所示,图中 $\boldsymbol{R}_1$ 表示两根杆之间通过滚动圆柱施加的作用力.

由左边的分离体图,在题 2.2 符号的规定下,有

$$+\circlearrowright \sum M_A = (2\text{ kN})(1\text{ m}) - |\boldsymbol{R}_1|(1.6\text{ m}) = 0$$

解得 $|\boldsymbol{R}_1| = 1.25$ kN.然后由右边的分离体图,

$$+\circlearrowright \sum M_E = (1\text{ kN})(0.6\text{ m}) - |\boldsymbol{R}_D|(1.2\text{ m}) - (1.25\text{ kN})(0.6\text{ m}) = 0$$

故 $|\boldsymbol{R}_D| = -0.125$ kN.结果说明 D 端的约束反力向下作用.

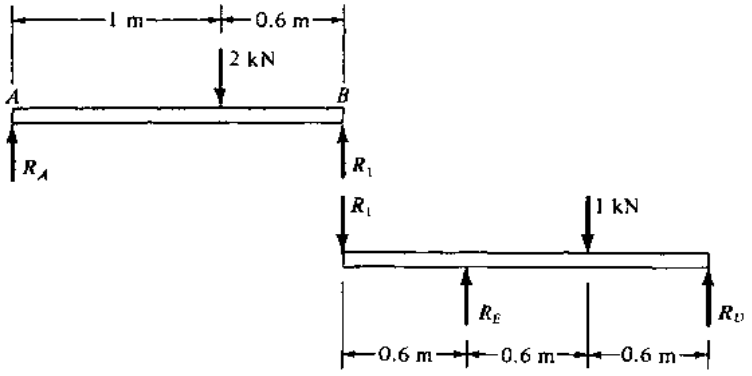


图 2-21

2.7　一造船厂的起重机在轨距为 8 ft 的铁轨上移动,如图 2-22 所示,而它设计的起吊能力为 $P = 30$ 吨.起重机本身的重量为 30 吨,一个重量未知的巨大平衡块 W 置于起重机左端的 A 点.起重机的重量通过系统的重心作用在距右轮 C 1.5 ft 处,假设铁轨对轮子 B 和 C 的约束反力只有垂直分量.当起重机起吊满载荷时必不能向右倾斜;当起重机空载时必不能向左倾斜.利用这两条准则求平衡块的重量及置放地点.

解　☞ 当起重机起吊 30 吨载荷且处于相对点 C 向右倾斜的边缘时,铁轨与轮子 B 之间没用作用力.这样,由平衡可列出

$$+\circlearrowright \sum M_C = 30(15) + 30(1.5) - (\boldsymbol{W})(x + 8) = 0$$

或

$$|\boldsymbol{W}|x + 8|\boldsymbol{W}| = 495 \tag{1}$$

当起重机空载且处于相对点 B 向左倾斜的边缘时,铁轨与轮子 C 之间没有作用力.由这种情况下的平衡,有

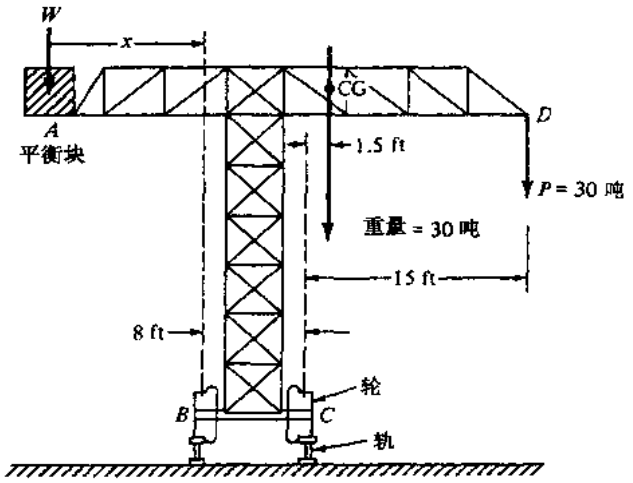


图 2-22

$$+\circlearrowright \sum M_B = -|W|x + 30(9.5) = 0$$

或
$$|W|x = 285 \tag{2}$$

上述两条件必须同时被满足. 将式(2)代入式(1),得 $|W| = 26.25$ 吨,然后将此值代入式(2),得 $x = 10.86$ ft.

2.8 两根等截面的刚性杆在 B 端焊接形成 60°角,如图 2-23 所示. A 端由一细绳悬挂,C 端承受一 $W/2$ 的垂直载荷. AB 杆重 W,长为 L;BC 杆重 $2W$,长 $2L$. 求当系统平衡时,BC 杆与水平的夹角 θ.

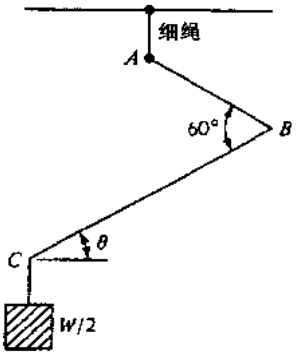


图 2-23

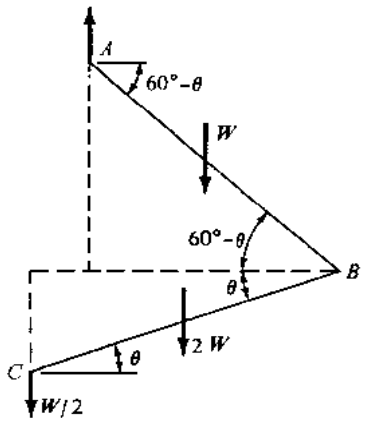


图 2-24

解 我们先对系统可能的平衡状态画一张比较准确的草图. 特别是假设 BC 杆与水平成 θ 角时,其重力(作用在杆的中点)的作用线在 A 点的右侧. 于是系统平衡位置如图 2-24 所示. 由几何关系,得平衡方程

$$+\circlearrowright \sum M_A = W\frac{L}{2}\cos(60^\circ - \theta) + 2W[L\cos(60^\circ - \theta) - L\cos\theta]$$
$$-\frac{W}{2}[2L\cos\theta - L\cos(60^\circ - \theta)] = 0$$

简化后得

$$\cos(60^\circ - \theta) = \cos\theta$$

由上式解得 $\theta = 30^\circ$.

这一结果是否依赖于我们上面所作的 $2W$ 的作用线在 A 点右侧的假设? 要回答这个问题,我们应该再画一张分离体图,图上重力 $2W$ 的作用线在 A 点的左侧. 结果发现对 A 点取矩再求和得到与上面完全一样的解. 于是,可确定解与所作假设无关,只要在取矩时仔细确定力臂的几何关系.

2.9 一航空航天器制造商正在设计一种称为"空中吊车"的气球-直升机组合系统,该系统可作为一台飞行起重机在山区运输货物. 系统中有两个圆柱体水平气球,每个长 26 m,直径 12 m. 两气球由类似桁架的结构连结,其下方悬挂一个可容纳一个人的小舱. 舱下的缆绳可起吊重达 20 000 N 的重物. 每个气球充氦气,气球间的桁架上装有两台涡轮发动机,一台由直升机水平旋翼提供动力用来起吊货物;另一台用来驱动推进器获得飞行的推力. 两个气球、桁架、发动机和操作人员总重为 27 300 N. 求提升一个 20 000 N 重物时,直升机水平旋翼所需施加的升力.

解 从物理学中的阿基米德原理可知,一个充有比空气轻的气体的气球之所以会产生浮力,是由于空气和该气体的密度不同. 也就是说,以一定体积的比空气轻的气体去置换相同体积的空气,则会产生净的向上作用的力,在该系统中升力为

$$L_G = Q_{air} - Q_{He}$$

式中 Q_{air}是两个气球中被置换的空气的重量,Q_{He}是两个气球中氦气的重量.

从物理常数表中可查到空气比重为 4.16 N/m³,而氦气比重为 1.75 N/m³.两个气球的体积为

$$2\pi(6\text{ m})^2(26\text{ m}) = 5\,880\text{ m}^3$$

所以,两个气球中被置换的空气重为

$$(5\,880\text{ m}^3)(4.16\text{ N/m}^3) = 24\,460\text{ N}$$

两个气球中氦气的重量为

$$(5\,880\text{ m}^3)(1.75\text{ N/m}^3) = 10\,290\text{ N}$$

气球产生的升力为

$$L_G = 24\,460 - 10\,290 = 14\,170\text{ N}.$$

由此,可将该系统的受力分析在图 2-25 中标出,其中 L_{heli}是所求的直升机水平旋翼升力.故

$$\sum F_y = L_{heli} + 14\,170 - 27\,300 - 20\,000 = 0$$

解得 $L_{heli} = 33\,130$ N.

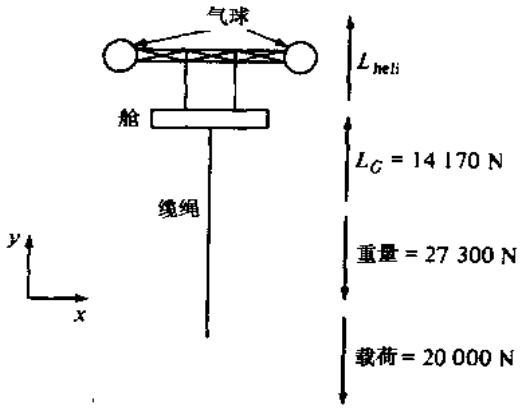


图 2-25

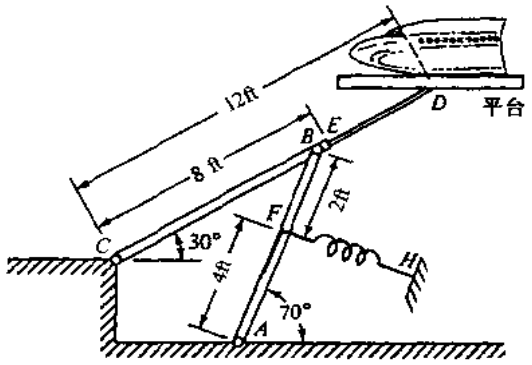


图 2-26

2.10　一训练飞机驾驶员的飞行模拟器如图 2-26 所示,飞机的机头部分与水平平台固结,二者总重 2500 lb.当 *CD* 绕 *C* 处的轴转动时,机头与平台就能升降.当栓塞 *ED* 在油缸 *CE* 内运动时,机头与平台就产生另一种运动.下方的油缸-栓塞装置 *AFB* 能绕 *A* 处的轴转动,并与 *CED* 通过一轴承架连接,该轴承架只能向 *CED* 传递垂直于 *CED* 的约束反力,弹簧 *FH* 用来提高整个系统的刚度,求在图示位置弹簧作用于 *AFB* 的力.

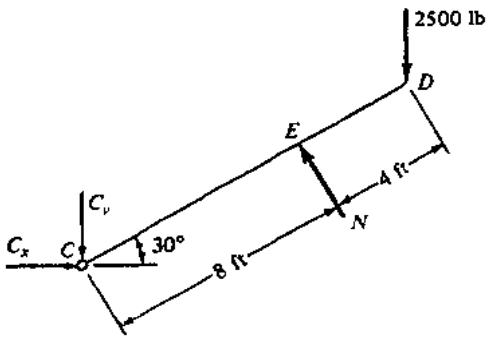


图 2-27

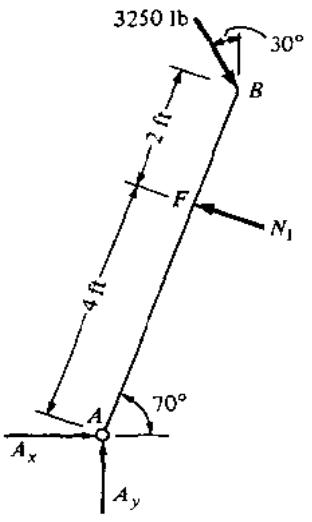


图 2-28

解 杆 CED 的分离体图如图 2-27 所示. 列平衡方程

$$+\circlearrowright \sum M_C = 2500(12)\cos 30^\circ - 8\,|\,\boldsymbol{N}\,| = 0$$

可解得 $|\,\boldsymbol{N}\,| = 3250$ lb. 现在可以画 AB 的分离体图，如图 2-28 所示，图中 $\boldsymbol{N}_1$ 即为所求之力. 再列平衡方程

$$+\circlearrowright \sum M_A = (3250)(\cos 30^\circ)(6\cos 70^\circ) + (3250)(\sin 30^\circ)(6\sin 70^\circ) - 4\,\cdot\,|\,\boldsymbol{N}_1\,| = 0$$

解得 $|\,\boldsymbol{N}_1\,| = 3735$ lb.

2.11 圆弧形杆 AB 和 CD 在 A 端和 C 端用圆柱铰链约束，两杆在 B 端用销钉连接，如图 2-29所示. 这样的系统称为三铰拱. 载荷为图示的 36 kN 垂直力. 求圆柱铰链 A 和 C 两处的约束反力.

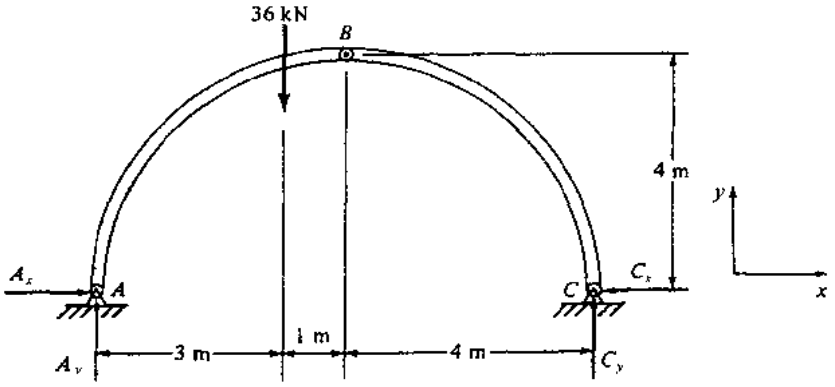


图 2-29

解 先以整个拱为研究对象，注意对整个系统来说，B 处销钉提供的约束反力是内力，故在分离体图上不出现. 在这种情况下，图 2-29 就可作为分离体图，列平衡方程

$$+\circlearrowright \sum M_A = 36(3) - 8(C_y) = 0 \quad \text{或} \quad C_y = 13.5\ \text{N}$$

$$\sum F_y = A_y + 13.5 - 36 = 0 \quad \text{或} \quad A_y = 22.5\ \text{N}$$

$$\sum F_x = A_x - C_x = 0 \quad \text{或} \quad A_x = C_x$$

然后以杆 BC 为研究对象(虽然图 2-30 画出了 AB 和 BC 两根杆的分离体图，我们只需利用 BC 杆的即可. 由 BC 杆的平衡.

$$+\circlearrowright \sum M_B = 4C_x - 13.5(4) = 0$$

解得 $C_x = 13.5$ N，于是 $A_x = 13.5$ N. 注意，因 A_x 和 C_x 解得皆为正值，故该二力必沿图 2-30 所示方向.

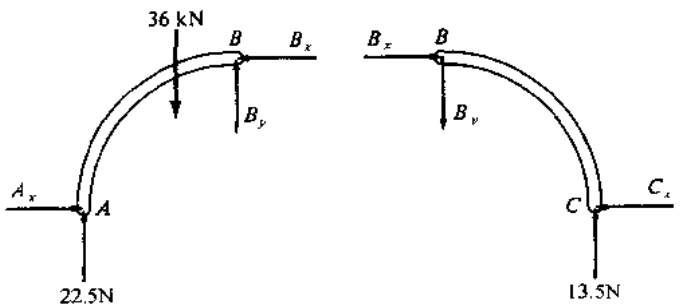


图 2-30

2.12　如图 2-31 所示,刚性杆 BC 在 C 端用活动铰链约束而在 B 端与一弹簧连结,弹性系数(即弹簧伸长单位长度所需之力)为 k.当角 $\theta=45°$时,弹簧没有伸长.载荷 $\boldsymbol{P}$ 作用于 BC 杆的中点.忽略杆 BC 和弹簧的重量,求当系统达到平衡时,角 θ 的值.

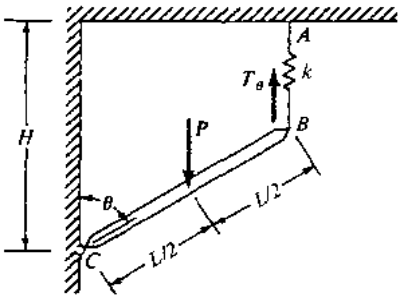


图 2-31

解　设弹簧未伸长时的长度为 L_0,由几何关系可知,$L_0=H-L\cos45°$,所以

$$H = L_0 + L\cos45° \tag{1}$$

由对 C 点力矩的平衡,得

$$+\circlearrowleft \sum M_C = |\boldsymbol{P}|\frac{L}{2}\sin\theta - |\boldsymbol{T}_\theta| L\sin\theta = 0 \quad 或 \quad |\boldsymbol{T}_\theta| = \frac{|\boldsymbol{P}|}{2} \tag{2}$$

上式中 $\boldsymbol{T}_\theta$ 是系统平衡时的弹力.

由弹性系数的定义,

$$|\boldsymbol{T}_\theta| = (H - L\cos\theta - L_0)k \tag{3}$$

将式(1)代入式(3),得

$$|\boldsymbol{T}_\theta| = Lk(\cos45° - \cos\theta) \tag{4}$$

由式(2)和式(4),并用 $|\boldsymbol{P}|=P$ 代入,得

$$\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{P}{2Lk}\right) \tag{5}$$

这一分析是基于弹力 T_θ 保持垂直的假设上.更加详细的分析将考虑到弹簧相对于 A 点的刚体转动.不过,即使对于弹簧较大角度的转动,式(5)所得结果仍是一很好近似解.

补充习题

2.13　一单位长度的实心圆柱靠在槽内,如图 2-32 所示,所有的表面都是光滑的.圆柱重 392.4 N.求圆柱在每个接触面的单位长度上的作用力.

答案:$|\boldsymbol{R}_A|=679.6$ N;$|\boldsymbol{R}_B|=784.8$ N

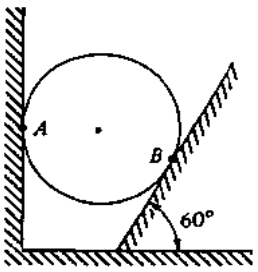


图 2-32

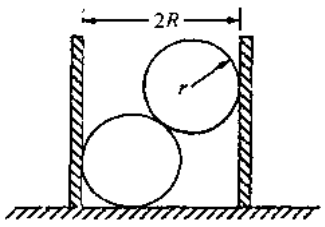


图 2-33

2.14　如图 2-33 所示,两个单位长度的实心圆柱重皆为 W,半径皆为 r,放在一个也是单位长度的矩形刚性箱内.由图示圆柱体所占的位置可明显看出 $2r>R$.求每个圆柱体在单位长度上作用于垂直箱壁上的

力.圆柱体的表面和箱壁都是光滑的.

答案:$W(R-r)\sqrt{r^2-(R-r)^2}$

2.15 如图 2-34 所示,两个光滑的小滑块放在一光滑圆柱的圆弧表面上并用一根无重的绳索连结,柔索与圆柱之间无摩擦,滑块的重量如图所标.求系统平衡时角 β 的大小.

答案:26.57°

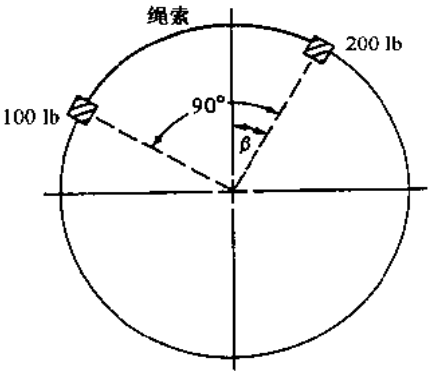


图 2-34

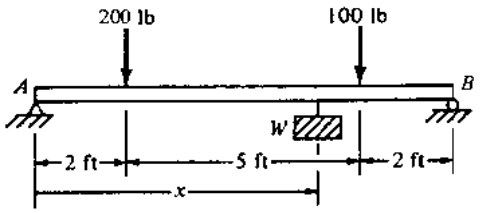


图 2-35

2.16 图 2-35 中的刚性杆 AB 在 A 端用圆柱铰链约束,在 B 端用滚动圆柱支撑.图上它分别受 100 lb 和 200 lb 两个载荷的作用,另外还有一个可移动的重物 $W-150$ lb.求当 A、B 两端的垂直约束反力相等时重物 W 的位置.

答案:$x=6.17$ ft

2.17 图 2-36 中的刚性杆 AB 在 A 端用圆柱铰链约束,在 B 端用光滑滚动圆柱支撑.所受载荷包括两个力和一个力偶,如图所示.求 A、B 两端垂直方向的约束反力.

答案:$|\boldsymbol{R}_A|=1950$ lb;$|\boldsymbol{R}_B|=750$ lb

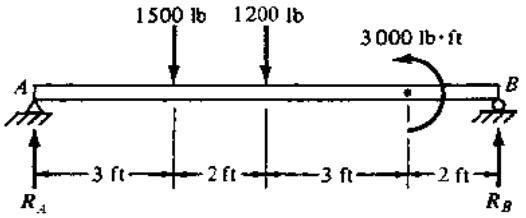


图 2-36

2.18 一个用来秤很小物体的秤盘其横梁长 0.6 m,指针长 30 cm,如图 2-37 所示.当一个 0.1 N 的重物放到

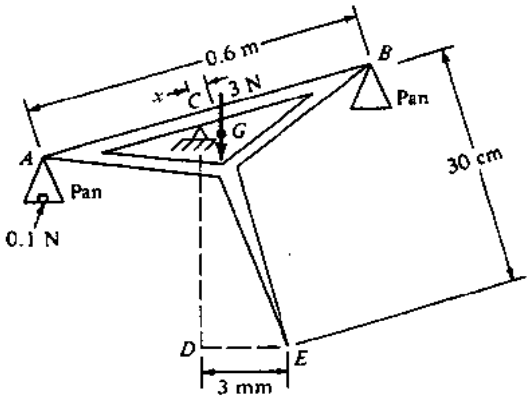


图 2-37

左边平衡盘上时,指针从它原来的垂直位置向右偏斜一距离 $DE=3$ mm. 求当系统处于平衡时,横梁 AB 的重心距秤盘刀口 C 的距离 x. 横梁重 3 N.

答案:0.01 m

2.19 图 2-38 是一座两层楼房的垂直剖面图. 楼房 9 klb 的自重作用在它的重心上. 建筑物统一规范规定,作用在二层顶部和一层顶部的设计风力分别为 4.12 klb 和1.90 klb. 规范也规定对每一项风力载荷的安全系数为 1.5. 求 A 处所需的束缚力,假设 B 端为圆柱铰链约束.

答案:$|\boldsymbol{R}_A|=5$ klb

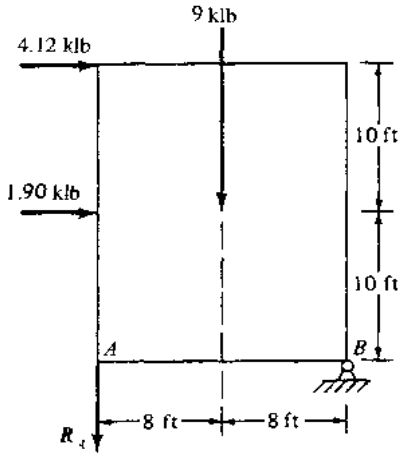


图 2-38

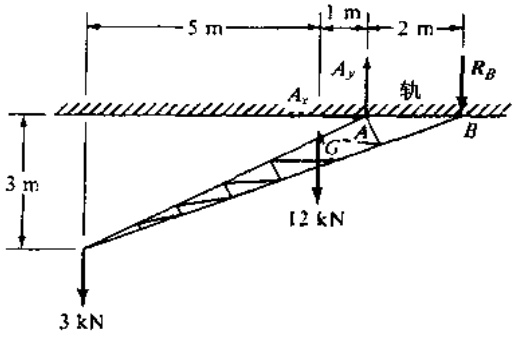


图 2-39

2.20 一台吊车架在高架轨道上,其 12 kN 的自重作用在它的重心上,如图 2-39 所示. 吊车所吊重物为 3 kN. 约束为 A 端的圆柱铰链和 B 端的光滑表面. 求 A、B 两端的约束反力.

答案:$|\boldsymbol{R}_B|=15$ kN;$A_y=30$ kN;$A_x=0$

2.21 一放在垂直平面内的四边形金属板,A 端圆柱铰链约束,B 端光滑滚动圆柱支撑,如图 2-40 所示. 载荷包括两个水平力,每个力大小为 60 N,和一个大小为 50 N·m 的力偶,均在图上标出. 求 B 处的约束反力.

答案:$|\boldsymbol{R}_B|=40$ N,方向为垂直向上

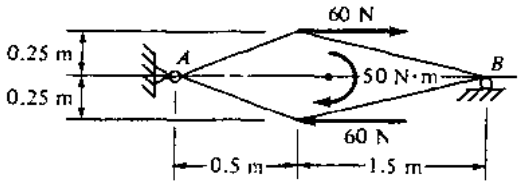


图 2-40

2.22 两块在垂直平面内的三角形板 ABC 和 CDE 在 C 处用圆柱铰链连接,在 A、E 两端用圆柱铰链支撑,如图 2-41 所示. 载荷包括一 40 kN 的垂直力和一大小为 25 kN·m 的力偶,均在图上标出. 忽略板的重量,求 A、E 两端的约束反力.

答案:$A_x=6.9$ N;$A_y=26.9$ N;$E_x=-6.9$ N;$E_y=13.1$ N

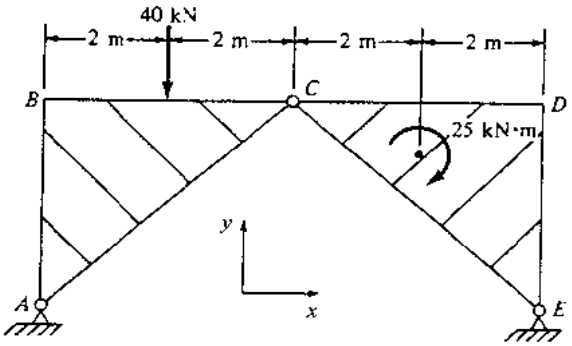


图 2-41

第三章　摩擦的作用

干摩擦

研究一个放在水平面上的重物 W. 相互接触的两个面都是干的(未经润滑). 若一水平力 P 逐渐地加到重物上,会引起一方向相反的力 F 来保持重物的平衡(见图 3-1). 因此这个摩擦力 F 是一个被动力. 随着力 P 不断加大,由于重物与水平面接触的性质限制了力 F 大小的增加,重物最终将开始运动(在图中朝向右方). 接触面之间所能产生的最大摩擦力称为极限摩擦力,并且当 F 达到这一值时,重物即将开始运动. 此时力 P 再增加一个微量,就会使重物向右加速运动.

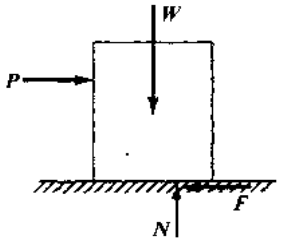


图 3-1

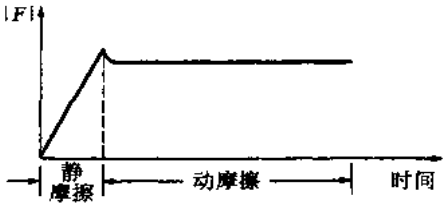


图 3-2

摩擦力总是出现在相互接触的表面并与接触面平行,其指向与相互接触的两个物体的相对运动方向相反. 在三个或更多物体的相互接触中(成对接触),须明白摩擦力总是阻止任何两个相互接触物体的相对运动,并且有时相对运动的方向与绝对运动(即相对于地球固定参照系的运动)会有所不同.

对于图 3-1 中的重物,(干)摩擦定律告诉我们,摩擦力 F 的最大可能值(作为力 P 的阻力)与法向力 N 成正比,比例系数通常记为 μ. 故

$$|F_{max}| = \mu |N|$$

实验表明,摩擦力与时间的关系通常具有图 3-2 所示形式. 图上左边直线区对应于静止的情况. 在这一阶段,力 P 随时间逐渐增加,力 F 也随之增加,直到达到峰值. 当力 F 达到峰值时,物块即将开始运动. 也只有在达到峰值时,摩擦力 F 的大小才决定于静摩擦因数,记为 μ_s. 所以我们通常写成 $|F_{max}| = \mu_s |N|$.

一旦物块开始运动,摩擦阻力会略微降低,但基本保持不变. 在这一阶段的摩擦因数称为动摩擦因数,并记为 μ_k,故 $|F| = \mu_k |N|$.

我们在本书中只关心静止的情形,所以只涉及 μ_s. 为表达形式简洁,我们就将 μ_s 记为 μ. 当 $\mu = 0$ 时,我们就回到了第二章所假设的光滑表面的情形. 对于通常遇到的接触表面,由实验确定的典型的 μ 值陈列如下:

中碳钢与中碳钢	0.6	金属与石材	0.30—0.70
铜与中碳钢	0.48	石材与石材	0.40—0.72
橡胶与金属	0.45	橡胶与水泥	0.40—0.92

当达到最大摩擦力时,法向力 N 与 F_{max} 和 N 的合力 R 之间的夹角 θ(如图 3-3 所示)称为摩擦角(参照例题 3.11).

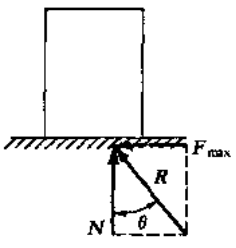


图 3-3

考虑摩擦作用的问题

求解涉及摩擦作用和摩擦力的问题，通常要比解将接触面假设为光滑表面的问题更需谨慎.例如，在第二章中，我们需要在分离体图上表示出各种不同类型约束所提供的约束反力和反力矩.但是，只要将力或力的分量放在正确的作用线上，我们无须去考虑力的方向(指向)是否正确.假若我们所假设的指向(沿力的作用线)不对，最后该力的大小为负值，说明需要将所设的指向颠倒.这对于解决问题没有多大影响.

然而，一旦涉及到摩擦力，情况就不是这样.在解这类问题时，正确表示摩擦力的指向(沿力的作用线)是必不可少的环节，否则问题的性质就会改变.进一步说，摩擦力必须总是与相对运动方向相反.

在使用关系式$|\boldsymbol{F}|=\mu|\boldsymbol{N}|$时也须十分谨慎，只有在能确定相邻表面的相对运动即将发生时才可用.若情况并非如此，则力 $\boldsymbol{F}$ 必须视为一个未知量.需要通过静平衡方程才能确定.

摩擦带

紧包在弧形表面的柔性带子通常用作传递动力或提升重物.对于图 3-4 中的系统，带子两端的张力有如下关系

$$\left|\frac{\boldsymbol{T}_2}{\boldsymbol{T}_1}\right| = \mathrm{e}^{\mu\alpha} \tag{3.1}$$

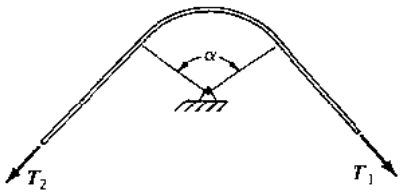


图 3-4

式中$|\boldsymbol{T}_2|>|\boldsymbol{T}_1|$，$\mu$ 是摩擦因数，α 是被带子包裹的圆心角，用弧度表示(参照例 3.12).

例　题

3.1　一架长为 L 重 35 kg 的梯子斜靠在垂直墙边，与水平成 60°角.梯子与墙以及梯子与地面之间的摩擦因数皆为 0.25.试问一个 72 kg 的人能在梯子上爬多高而不致使梯子即将开始滑动?

解　梯子和人的分离体图如图3-5所示，图中 xL 是人在梯子上所爬的距离，所以 $0<x<1$.由本题的几何关系可清楚看出，A、B 两处将同时开始滑动，此时两处的摩擦力如图中所标.由系统平衡，可列出方程

$$+\circlearrowleft \sum M_B = |\boldsymbol{N}_A| L\cos60^\circ - \frac{|\boldsymbol{N}_A|}{4} L\sin60^\circ - 706(L-xL)\cos60^\circ - 343\frac{L}{2}\cos60^\circ = 0$$

$$\sum F_x = \frac{|\boldsymbol{N}_A|}{4} - |\boldsymbol{N}_B| = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_A| - 343 - 706 + \frac{|\boldsymbol{N}_B|}{4} = 0$$

联立求解，得 $x=0.45$.

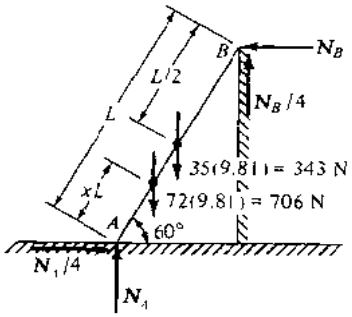


图 3-5

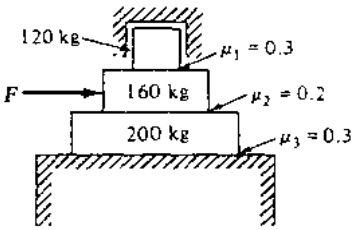


图 3-6

3.2 三个刚性物块质量分别为 120、160 和 200 kg 依次叠放在一粗糙的刚性表面上，如图3-6所示. 顶上的物块被一罩帽所约束不能沿水平方向运动. 求：在物块开始运动之前，水平力 $\boldsymbol{F}$ 的最大值.

解 三个物块的重量分别为

$$(120\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 1\ 177\ \text{N}$$
$$(160\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 1\ 570\ \text{N}$$
$$(200\ \text{kg})(9.81\ \text{m/s}^2) = 1\ 962\ \text{N}$$

当运动即将发生时，存在两种可能的运动方式. 第一种仅是中间的物块开始向右滑动，第二种是中间的和最下面的物块一起(像一个刚体)开始向右运动. 对第一种可能的运动，中间物块的分离体图如图3-7 所示. 由系统平衡，得

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_2| - 1177 - 1570 = 0$$
$$\sum F_x = |\boldsymbol{F}_1| - 0.3(1177) - 0.2|\boldsymbol{N}_2| = 0$$

由第一式可解得 $|\boldsymbol{N}_2| = 2747$ N，由第二式解得 $|\boldsymbol{F}_1| = 902$ N.

对第二种可能的运动，当运动即将发生时，中间和最下面的物块合在一起(作为一个刚体)，其分离体图如图 3-8 所示. 由系统平衡，得

$$\sum F_y = -1177 - 1570 - 1962 + |\boldsymbol{N}_3| = 0$$
$$\sum F_x = |\boldsymbol{F}_2| - 0.3(1177) - 0.3|\boldsymbol{N}_3| = 0$$

由第一式可解得 $|\boldsymbol{N}_3| = 4709$ N，由第二式解得 $|\boldsymbol{F}_2| = 1766$ N.

因为 $|\boldsymbol{F}_1| = 902$ N，小于 $|\boldsymbol{F}_2| = 1766$ N，所以首先出现的是第一种运动形式.

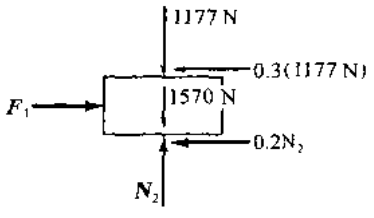


图 3-7

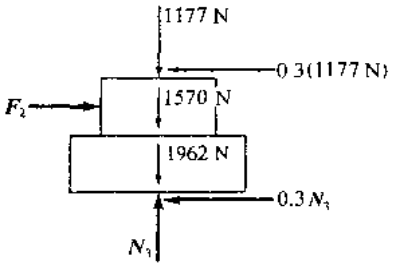


图 3-8

3.3 一实心的半圆杆重 W，半径为 r，放在水平面上，如图3-9所示. 在杆的平面上 C 点作用有水平力 $\boldsymbol{P}$，C 点到半圆圆心 O 的距离为 $kr(0 \leqslant k \leqslant 1)$. 水平面与杆之间的摩擦面数为 μ. 求：当运动即将发生时，半圆杆上的平面与水平面所成之角 θ.（须注意，杆的重量作用在其横截面的重心 G 上，G 的位置距半圆圆心的距离为 $4r/3\pi$.）

解 解此题有一点十分重要，即杆与水平面接触点 A 处的法向约束反力 N 必指向 O 点. 然后，

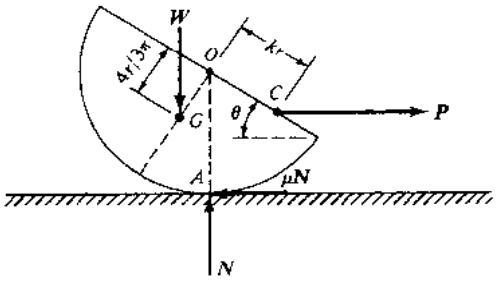


图 3-9

由系统平衡得

$$\sum F_x = |\boldsymbol{P}| - \mu |\boldsymbol{N}| = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}| - |\boldsymbol{W}| = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = |\boldsymbol{P}|(r - kr\sin\theta) - |\boldsymbol{W}|\frac{4r}{3\pi}\sin\theta = 0$$

由上面方程组可解得 $\theta = \arcsin[3\pi\mu/(3\mu k\pi + 4)]$.

3.4　一半径为 r 的实心圆轴以恒定的角速度 ω 在一个半径为 R(稍大于 r)的轴承内转动，如图 3-10 所示. 轴与轴承表面间的摩擦因数为 μ. 求轴的圆心 O' 相对于轴承圆心 O 的位置.

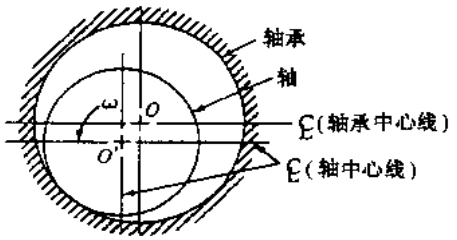


图 3-10

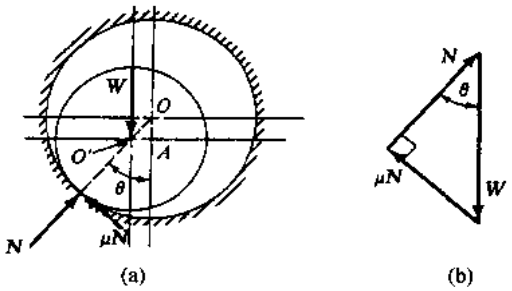


图 3-11

解　在画转动轴的分离体图(图 3-11(a))时必须注意，轴与轴承接触点上的法向约束反力的作用线通过双方的圆心，摩擦力自然垂直于法向约束反力，故在轴与轴承的接触点与两圆相切. 图中 $\boldsymbol{W}$ 表示轴的重力. 轴的平衡可由图 3-11(b)中封闭的力三角形表示. 因为 $OO' = R - r$，由力三角形可得

$$|\boldsymbol{W}| = \sqrt{|\boldsymbol{N}|^2 + \mu^2 |\boldsymbol{N}|^2} = |\boldsymbol{N}|\sqrt{1+\mu^2}$$

$$\cos\theta = \frac{|\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{W}|} = \frac{|\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{N}|\sqrt{1+\mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

$$\sin\theta = \frac{\mu|\boldsymbol{N}|}{|\boldsymbol{W}|} = \frac{\mu}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

轴的圆心相对于轴承圆心的水平位移为

$$O'A = OO'\sin\theta = \frac{\mu(R-r)}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

垂直位移为

$$OA = OO'\cos\theta = \frac{(R-r)}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

3.5　一圆环处于垂直平面内，一长度等于圆环半径 R 的直杆放置在环内，其两端架在圆环粗糙的内表面上，如图 3-12 所示. 杆的两端与圆环内表面之间的摩擦因数为 0.5. 求：杆

即将开始运动时，它与水平面之间的倾角．假设杆不会滑出圆环所在平面．

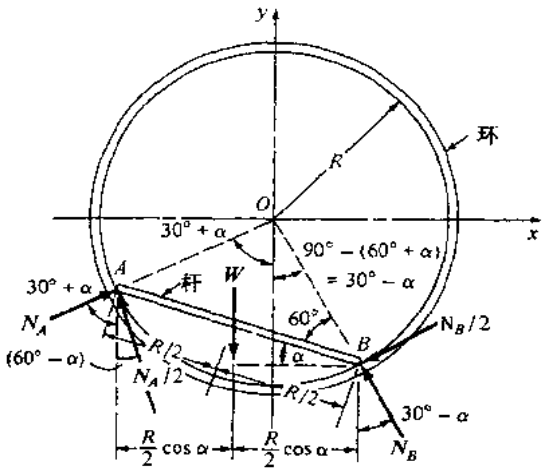


图 3-12

解 图 3-12 包含了杆在即将运动瞬间的分离体图(注意，因为三角形 OAB 是等边三角形，故角 ABO 为 60°)．由系统的平衡，我们可以对三个未知量 N_A、N_B 和所求的倾角 α 建立三个方程：

$$+\circlearrowleft \sum M_0 = \frac{|N_A|}{2}R + \frac{|N_B|}{2}R - |W|\left[\frac{R}{2}\cos\alpha - R\sin(30^\circ - \alpha)\right] = 0 \tag{1}$$

$$\sum F_x = -|N_B|\sin(30^\circ - \alpha) - \frac{N_B}{2}\cos(30^\circ - \alpha) + |N_A|\sin(30^\circ + \alpha) - \frac{|N_A|}{2}\sin(60^\circ - \alpha) = 0 \tag{2}$$

$$\sum F_y = -|W| + |N_A|(\cos 30^\circ + \alpha) + \frac{|N_A|}{2}\cos(60^\circ - \alpha) + |N_B|\cos(30^\circ - \alpha) - \frac{|N_B|}{2}\sin(30^\circ - \alpha) = 0 \tag{3}$$

由式(2)得

$$|N_A| = |N_B|\frac{\sin(30^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}\cos(30^\circ - \alpha)}{\sin(30^\circ + \alpha) - \frac{1}{2}\sin(60^\circ - \alpha)} = |N_B|Q$$

将上式代入式(1)和式(2)，得一关于所求角 α 的方程：

$$\frac{Q+1}{Q\sin(30^\circ + \alpha) + \frac{1}{2}Q\cos(60^\circ - \alpha) + \cos(30^\circ - \alpha) - \frac{1}{2}\sin(30^\circ - \alpha)} = \cos\alpha - 2\sin(30^\circ - \alpha)$$

用凑试法解上面方程，得近似解 $\alpha = 10^\circ$．

3.6 一实心圆柱和一个三角形物块构成一个两个物体的系统．该系统放置在一斜面上，如图 3-13 所示．圆柱重为 W_C，物块重为 W_B．假设物块不翻倒且所有接触面之间的摩擦因数均为 μ．求：欲使圆柱不滚下斜面，物块应具有的最小重量．

解 在画这两个物体的分离体图时须十分谨慎．分离体图如图 3-14 所示，但最好先画圆柱的分离体受力图，将斜面和物块对它的作用力标在图上．因为圆柱即将滚下斜面，为防止这一点，物块对圆柱施加的摩擦力分量 μN 必定按图示的方向．但是，由于圆柱相对于圆柱与斜面的接触点是滚动而不是滑动，所以我们没有理由断定此处的摩擦力已达到最大值 μN_C．相反，我们必须将 F_C 视为未知量．这样，题中就有 5 个未知量：N、N_B、N_C、F_C 和 W_B．对于物块，我们可建立 2 个平衡方程：

$$\sum F_x = -|\boldsymbol{N}| + \mu|\boldsymbol{N}_B| - |\boldsymbol{W}_B|\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_B| - \mu|\boldsymbol{N}| - |\boldsymbol{W}_B|\cos\theta = 0$$

对于圆柱，我们可建立 3 个平衡方程：

$$\sum F_x = |\boldsymbol{N}| + |\boldsymbol{F}_C| - |\boldsymbol{W}_C|\sin\theta = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_C| + \mu|\boldsymbol{N}| - |\boldsymbol{W}_C|\sin\theta = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_O = \mu|\boldsymbol{N}|r - |\boldsymbol{F}_C|r$$

由上面方程组解得

$$W_B = \frac{(W_C\sin\theta)(1-\mu)}{\mu\cos\theta - \sin\theta}$$

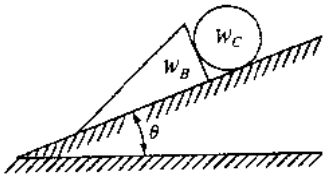


图 3-13

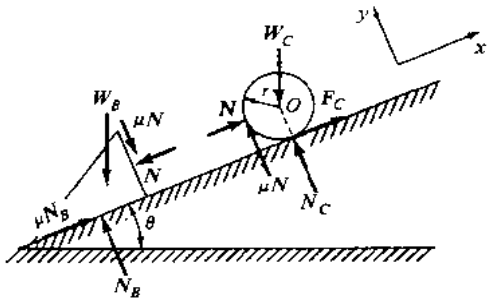


图 3-14

3.7　一个 200 kg 的物块放置在一个 100 kg 的物块顶上，如图 3-15 所示. 顶上的物块承受一 400 N 的水平力作用，底下的物块与一条柔绳连结. 柔绳跨过一光滑的定滑轮与另一重物连结，绳中的张力为 $\boldsymbol{T}$. 求：底下的物块平衡时，绳的张力大小. 各接触面处的摩擦因数如图所示.

解　在开始解此题时，我们尚不能确定一定存在平衡状态. 但是我们不妨从画顶上物块的分离体图着手，并将底下物块对它作用的法向力和摩擦力分别标为 $\boldsymbol{N}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_1$. 图 3-16 即是我们所画出的分离体图. 注意，到此为止，我们没有利用公式 $\boldsymbol{F}_1 = \mu\boldsymbol{N}_1$，因为并不知道运动是否即将开始.

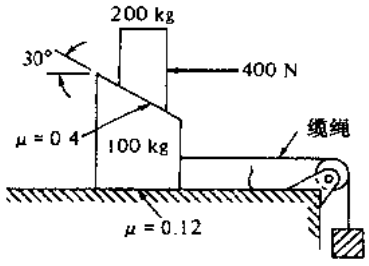


图 3-15

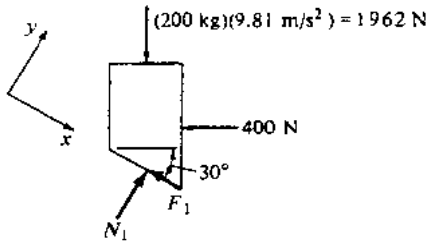


图 3-16

如果存在平衡状态，则有平衡方程：

$$\sum F_x = -|\boldsymbol{F}_1| - 400\cos30^\circ + 1962\cos60^\circ$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_1| - 400\sin30^\circ - 1962\sin60^\circ$$

解之，得 $|\boldsymbol{F}_1| = 635$ N 和 $|\boldsymbol{N}_1| = 1899$ N. 由上述结果可算得摩擦因数 $\mu = |\boldsymbol{F}_1|/|\boldsymbol{N}_1| = 0.334$. 因为该值小于题目所给出的物块与物块接触处的实际值 0.4，故大小为 $|\boldsymbol{F}_1| = 635$ N 的摩擦力是可以出现的，由此可以确定这样的平衡状态是存在的.

现在来画两个物块合在一起的分离体图，假定整个系统即将开始向右运动. 3-17(a)即是我们所要

之图.由系统平衡可列方程

$$\sum F_x = |\boldsymbol{T}| - 400 - |\boldsymbol{F}_2| = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_2| - 1962 - 981 = 0$$

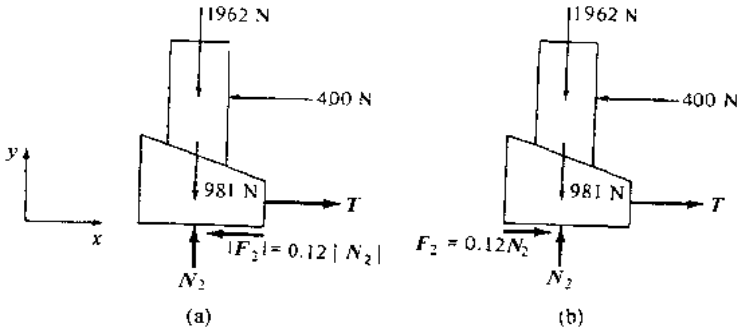


图 3-17

解之,得

$$|\boldsymbol{N}_2| = 2943\ \text{N} \quad |\boldsymbol{F}_2| = 0.12|\boldsymbol{N}_2| = 353\ \text{N} \quad |\boldsymbol{T}| = 753\ \text{N}$$

我们还必须考虑整个系统即将开始向左运动的可能性.此时摩擦力将指向右方,如图 3-17(b)所示.由系统平衡可列方程

$$\sum F_x = |\boldsymbol{T}| - 400 + |\boldsymbol{F}_2| = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_2| - 1962 - 981 = 0$$

解之,得

$$|\boldsymbol{N}_2| = 2943\ \text{N} \quad |\boldsymbol{F}_2| = 0.12|\boldsymbol{N}_2| = 353\ \text{N} \quad |\boldsymbol{T}| = 47\ \text{N}$$

于是,只要绳的张力在 47 N 和 753 N 之间,系统就能保持平衡.当张力恰好等于这两个极限值时,系统即将开始运动.

3.8 图 3-18 所示的系统包括两架完全一样的梯子,每架重 W,长为 L.两梯子在顶端(即点 B 处)用圆柱铰链约束,它们的下端 A 和 C 与粗糙水平面接触.当每架梯子与垂直线成 30°角时,一个重为 W 的人能够爬到每架梯子的一半高度而不致使其中一个下端开始滑动.求梯子下端与水平面之间的摩擦因数.

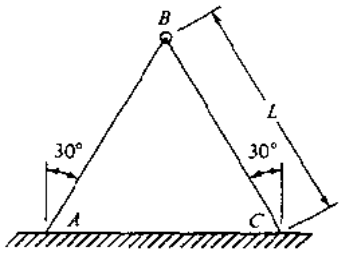


图 3-18

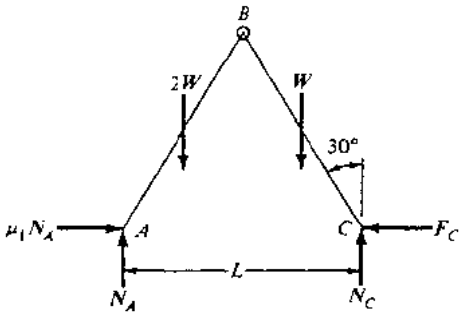


图 3-19

解 不妨假定这个人爬的是左边的梯子 AB.我们现在并不清楚,究竟是 A 端还是 C 端首先开始滑动,但不妨假设滑动即将开始于 A 端.整个系统的分离体图如图3-19所示,注意,图中力 $\boldsymbol{F}_C$ 是未知的,须由平衡方程解得,并不是必定等于 $\mu\boldsymbol{F}_C$.由系统平衡可列方程

$$+\circlearrowright \sum M_C = |\boldsymbol{N}_A| L - |\boldsymbol{W}| \frac{L}{2}\sin 30° - 2|\boldsymbol{W}| \left(L\sin 30° + \frac{L}{2}\sin 30°\right) = 0$$

解之,得 $|\boldsymbol{N}_A| = \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}|$,还可列方程

$$\sum F_y = \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}| + |\boldsymbol{N}_C| - 2|\boldsymbol{W}| - |\boldsymbol{W}| = 0$$

故$|\boldsymbol{N}_C| = \frac{5}{4}|\boldsymbol{W}|$.

现在来画梯子AB的分离体图(见图3-20),图中B_x和B_y表示梯子BC通过B处圆柱铰链约束施加于AB的约束反力分量.由平衡可列方程

$$+\circlearrowright \sum M_B = \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}|L\sin30^\circ - \frac{7}{4}\mu_1|\boldsymbol{W}|L\cos30^\circ - 2|\boldsymbol{W}|\frac{L}{2}\sin30^\circ = 0$$

由此式可得$\mu_1 = \frac{\sqrt{3}}{7} = 0.247$.

由图3-19可知,欲保持水平方向的平衡,要求$|\boldsymbol{F}_C| = \mu_1|\boldsymbol{N}_A|$.我们必须要回答下面的问题:根据计算所得的摩擦因数$\mu_1 = \sqrt{3}/7$,在C端形成的水平力是否足以保持平衡?利用此摩擦因数,可求得力$\boldsymbol{F}_C$的最大值为

$$|\boldsymbol{F}_C|_{\max} = \mu_1|\boldsymbol{N}_C| = \frac{\sqrt{3}}{7} \times \frac{5}{4}|\boldsymbol{W}| = 0.309|\boldsymbol{W}|$$

然而在A端,

$$\mu_1|\boldsymbol{N}_A| = \frac{\sqrt{3}}{7} \times \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}| = 0.433|\boldsymbol{W}|$$

这样,由于C端所能形成的最大的力小于水平方向平衡所需之力,所以我们的解在物理上是不能成立的.这说明,在滑动即将开始于A端的假设下,系统平衡是不可能存在的.

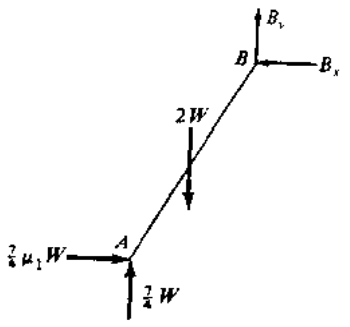


图3-20

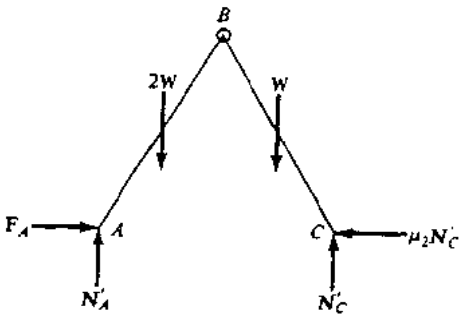


图3-21

于是,我们现在必须研究当人爬到AB的一半高度时,滑动即将开始于C端的情况.在这种情况下系统的分离体图如图3-21所示.由平衡可列方程

$$+\circlearrowright \sum M_C = |\boldsymbol{N}'_A|L - |\boldsymbol{W}|\frac{L}{2}\sin30^\circ - 2|\boldsymbol{W}|\left(L\sin30^\circ + \frac{L}{2}\sin30^\circ\right) = 0$$

解之,得$|\boldsymbol{N}'_A| = \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}|$,还可列方程

$$\sum F_y = \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}| + |\boldsymbol{N}'_C| - 2|\boldsymbol{W}| - |\boldsymbol{W}| = 0$$

故$|\boldsymbol{N}'_C| = \frac{5}{4}|\boldsymbol{W}|$.

右边梯子BC的分离体图如图3-22所示,由平衡可列方程

$$+\circlearrowright \sum M_B = -\frac{5}{4}|\boldsymbol{W}|\frac{L}{2} + |\boldsymbol{W}|\frac{L}{2}\sin30^\circ + \frac{5}{4}\mu_2|\boldsymbol{W}|L\cos30^\circ = 0$$

解得$\mu_2 = \frac{\sqrt{3}}{5} = 0.346$.

我们应该检查一下,看看这个摩擦因数是否能使A端的力足以保持系统平衡.A端摩擦力的最大值为

$$|\boldsymbol{F}_A|_{\max} = \mu_2|\boldsymbol{N}'_A| = \frac{\sqrt{3}}{5} \times \frac{7}{4}|\boldsymbol{W}| = 0.606|\boldsymbol{W}|$$

此时C端的摩擦力为

$$\mu_2|\boldsymbol{N}'_C| = \frac{\sqrt{3}}{5} \times \frac{5}{4}|\boldsymbol{W}| = 0.433|\boldsymbol{W}|$$

于是，为保持平衡，A 端所需的摩擦力小于其可能提供的最大摩擦力，故 $\mu_2=\sqrt{3}/5$ 这个解在物理上是能够成立的.

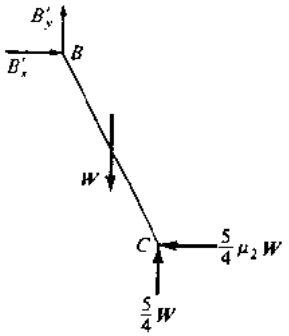


图 3-22

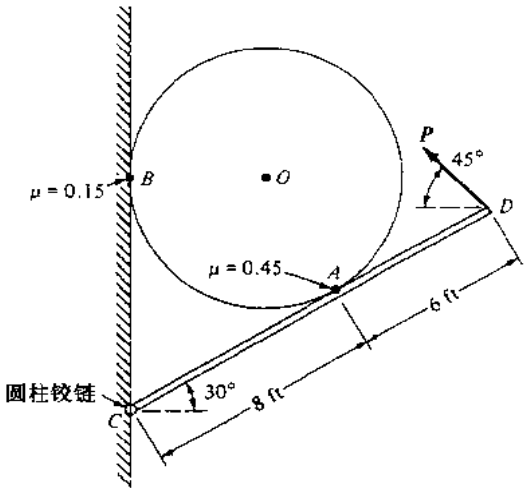


图 3-23

3.9 一重为 W 的圆柱被夹在粗糙的垂直墙面和一根与墙用圆柱铰链连接的斜杆 CD 之间，如图 3-23 所示. 杆 CD 的重量不计. 各接触面之间的摩擦因数已在图上标出. 在杆 CD 的上端作用有一与水平成 45°角的力 $\boldsymbol{P}$. 求：当圆柱即将开始向上运动时，力 $\boldsymbol{P}$ 的大小.

解 我们先画斜杆 CD 的分离体图，如图 3-24 所示. 注意，摩擦力 $\boldsymbol{F}_2$ 可能出现在图示的两个方向上，但不论哪个方向的 $\boldsymbol{F}_2$，在下面对 C 点取矩的方程中均不出现.

$$+\circlearrowright \sum M_C = 8\,|\boldsymbol{N}_2| - (|\boldsymbol{P}|\cos 15°)(14) = 0 \quad 或 \quad |\boldsymbol{N}_2| = 1.69\,|\boldsymbol{P}|$$

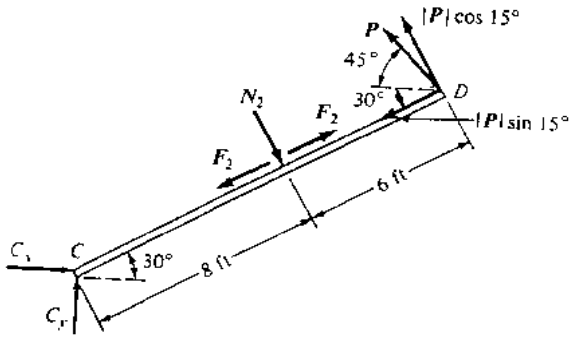


图 3-24

接着我们来画圆柱的分离体图. 目前，究竟是 A 点还是 B 点即将开始滑动尚无法确定. 特别是没有理由认为 A 点和 B 点将同时开始滑动. 这样，不妨先假设是 A 点而不是 B 点即将开始滑动. 在这种情况下，A 点的摩擦力为 $0.45|\boldsymbol{N}_2|$，而 B 点的摩擦力仍是个未知量，需要由平衡方程来求解，即 $|\boldsymbol{F}_1| = 0.15|\boldsymbol{N}_1|$ 不成立. 分离体图如图 3-25 所示. 由圆柱的平衡可列出方程

$$+\circlearrowright \sum M_O = 0.45\,|\boldsymbol{N}_2|\,r - |\boldsymbol{F}_1|\,r = 0$$

$$\sum F_x = |\boldsymbol{N}_1| - |\boldsymbol{N}_2|\sin 30° - 0.45\,|\boldsymbol{N}_2|\cos 30° = 0$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{N}_2|\cos 30° - |\boldsymbol{F}_1| - 0.45\,|\boldsymbol{N}_2|\sin 30° - |\boldsymbol{W}| = 0$$

从后面两个方程解得 $|\boldsymbol{N}_1| = 4.60|\boldsymbol{W}|$ 和 $|\boldsymbol{N}_2| = 5.17|\boldsymbol{W}|$.

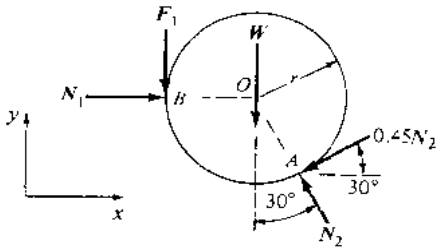


图 3-25

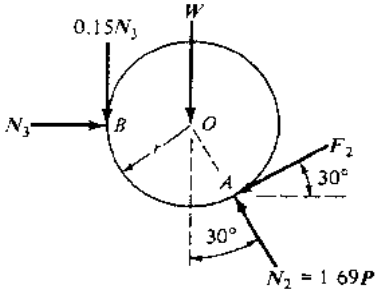


图 3-26

现在我们必须来检查一下，看看上面计算所得 $|F_1|$ 的值是否能在 B 点形成. 题目给出的 B 点摩擦因数为 0.15，但从计算所得的值，可得

$$\frac{|F_1|}{|N_1|} = \frac{0.45|N_2|}{|N_1|} = \frac{0.45(5.17|W|)}{4.60|W|} = 0.505$$

上面结果表明，要在 B 点形成上述计算所得的 $|F_1|$ 的值，该处的摩擦因数要求达 0.505. 这个值超过了题目给定的值 0.15，故摩擦力 $|F_1|$ 不可能形成. 这说明我们假设 A 点即将开始滑动是不对的.

于是，我们现在必须研究是 B 点而不是 A 点即将开始滑动的情形，此时 A 点的摩擦力须由平衡方程解出. 在这种情况下，圆柱的分离体图如图 3-26 所示. 由平衡可列出方程

$$\sum F_x = |N_3| - |N_2|\sin30° - |F_2|\cos30° = 0$$

$$\sum F_y = |N_2|\cos30° - 0.15|N_3| - |W| - |F_2|\sin30° = 0$$

$$+\circlearrowright \sum M_0 = |F_2|r - 0.15|N_3|r = 0$$

解之，得 $|F_2| = 0.15|N_3|$，$|N_2| = 1.36|W|$，$|N_3| = 0.784|W|$，以及从式(1)得 $|P| = 0.805|W|$.

最后，我们应该来检查一下，看看上面计算所得 $|F_2|$ 的值是否能在 A 点形成. 从上面的结果，我们有

$$\frac{|F_2|}{|N_2|} = \frac{0.15(0.785W)}{1.36W} = 0.086$$

该值为摩擦因数 μ 所需的最小值. 因为题目所给 A 点的摩擦因数为 0.45，故这一结果在物理上是成立的.

总的来说，$|P| = 0.805|W|$ 的力会使圆柱即将开始向上运动，此时在 B 点出现滑动(此处形成最大的摩擦力)，在 A 点出现滚动(此处形成的摩擦力小于最大值).

3.10　一直杆 AB 的下端 A 受无摩擦的球铰约束，其上端靠在一粗糙的垂直墙上，如图 3-27 所示. 杆的重量为 W，它与垂直墙之间的摩擦因数为 μ. 求杆即将开始运动时的位置(用 θ 角表示).

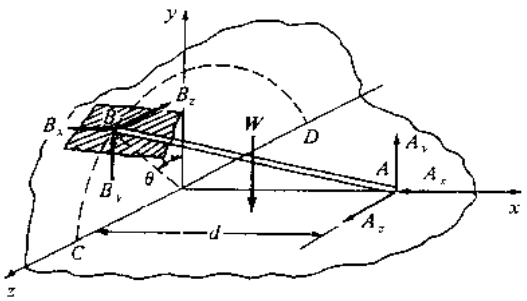


图 3-27

解　杆的 B 端可以落在图上虚线所画半圆的任何位置上，而半圆在与垂直墙重合的 yz 平面内. 我们要求的就是向下运动即将开始时，杆所在的位置. 在画杆的分离体图时必须清楚，墙对杆 B

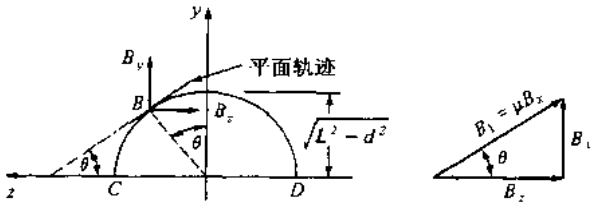


图 3-28

端的作用力一定落在这样一个平面内：该平面与 yz 平面相垂直，同时与半圆 CD 相切于 B 点. 我们用三个分别平行于 x、y 和 z 轴的分量 B_x、B_y 和 B_z 来表示这个力.

图 3-28 是从 x 轴正向向 yz 平面看的左视图，图上画出了该力的两个分量以及与半圆相切的平面与 yz 平面的交线. 由图 3-28 所示的关于这两个分量的力三角形，并且考虑到摩擦力 B_1 显然应在 yz 平面内，同时也在与半圆相切平面内，且等于 μB_x，故有

$$B_y = \mu B_x \sin\theta \qquad B_z = \mu B_x \cos\theta$$

于是，我们有 5 个未知量：A_x、A_y、A_z、B_x 和 θ. 因为题目只要求 θ，我们只须写出两个平衡方程：

$$\sum F_z = A_z - B_z = 0 \quad 或 \quad A_z = B_z = \mu B_x \cos\theta$$

$$+\circlearrowright \sum M_y = B_x \sqrt{L^2 - d^2}\sin\theta - A_z d = 0$$

将第二式中的 A_z 置换掉，解得

$$\theta = \arctan \frac{\mu d}{\sqrt{L^2 - d^2}}$$

举一个例子，若 $L = 3$ m，$d = 2.5$ m 和 $\mu = 0.3$，

则

$$\theta = \arctan\left[0.3(3)/\sqrt{3^2 - (2.5)^2}\right] = 14.3^\circ$$

3.11 在采矿和采石作业中遇到的一个问题是岩石的滑坡. 通常滑坡的岩石具有三角形的截面，如图 3-29 中阴影部分所示，并且滑坡断裂出现在与水平面成 ψ 角的斜面上. 有两个机制可以阻止三角形岩石的滑坡：(1)内聚力，这是一种相邻粒子之间的剪切阻力，它与将粒子压合在一起的法向力无关，即使法向力为零时它也存在；(2)干摩擦. 这两种机制的综合作用在图 3-30 中得到了最好的说明，该图将单位面积剪切阻力作为单位面积法向力的函数来画. 对于任何给定的法向力来说，阻止滑坡总的阻力等于内聚力引起的阻力与干摩擦引起的阻力之和：

单位面积的剪切力 = 内聚力 + (单位面积的法向力)$(\tan\theta)$

对于具有内聚力 $c = 2000$ lb/ft^2，比重为 160 lb/ft^2 和摩擦角 $\theta = 20^\circ$ 的岩石，求：当斜面与水平成角 $\psi = 50^\circ$ 时，三角形石块即将开始滑坡的临界高度 H.

解 首先须确定三角形石块的重量. 假设石块在垂直于书页平面的方向上为单位厚度. 由图 3-29可知

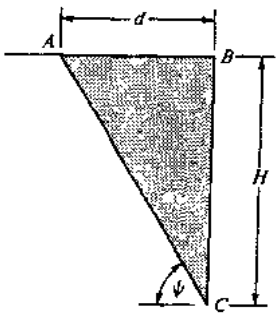


图 3-29

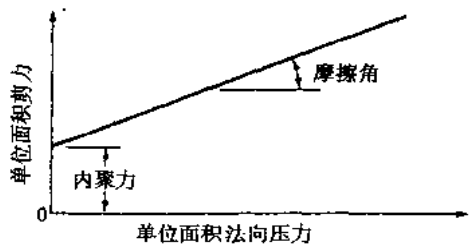


图 3-30

$$W = \frac{1}{2} dH(160\ \text{lb/ft}^2)$$

因为 $d = H/\tan 50^\circ = 0.844\ H$，故

$$W = \frac{1}{2}(0.84\ H)(H)(160) = 67.2\ H^2$$

又因 $AC = H/\sin 50^\circ = 1.30\ H$，故沿 AC 的内聚力大小为

$$|\boldsymbol{C}| = (2000\ \text{lb/ft}^2)(1\ \text{ft})(1.30\ H\ \text{ft}) = 2600\ H\ \text{lb}$$

摩擦角 θ 是法向力 $\boldsymbol{N}$ 与 $\boldsymbol{N}$ 和摩擦力 $\boldsymbol{F}$ 合力 $\boldsymbol{R}$ 的夹角，如图 3-31 所示. 所以

$$\frac{|\boldsymbol{F}|}{\boldsymbol{N}} = \tan 20^\circ \quad \text{或} \quad |\boldsymbol{F}| = 0.364\ \text{N}$$

三角形石块的分离体图(图 3-32)表明，在平衡的条件下，有

$$\sum F_x = |\boldsymbol{N}| \sin 50^\circ - 2600H\cos 50^\circ - 0.364\,|\boldsymbol{N}| \cos 50^\circ = 0$$

$$\sum F_y = -67.2H^2 + |\boldsymbol{N}| \cos 50^\circ + 2600H\sin 50^\circ + 0.364\,|\boldsymbol{N}| \sin 50^\circ = 0$$

由第二式解得 $H = 72.7$ ft.

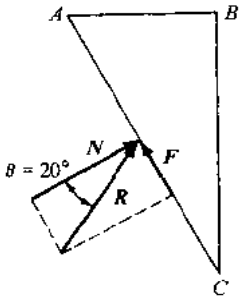


图 3-31

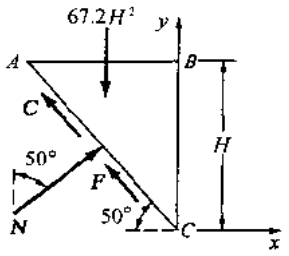


图 3-32

3.12　如图 3-33 所示，两个定滑轮圆心至圆心的距离为 7 in，通过一根皮带将动力从一头传到另一头. 皮带与每个定滑轮之间的摩擦因数为 0.25. 如果皮带上松弛段的拉力为 160 lb，求绷紧段上的拉力以及所能传递的最大转矩.

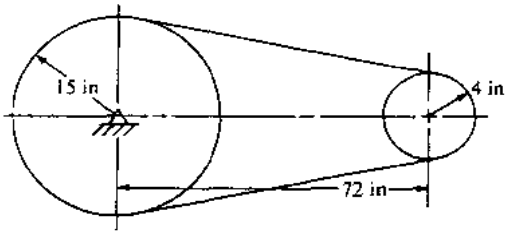


图 3-33

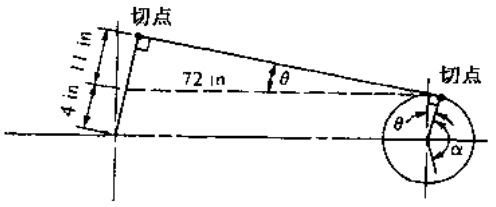


图 3-34

解　皮带的临界(或极限)接触长度指的是与较小滑轮接触的长度，由于皮带与较小滑轮接触的

长度要短于与较大滑轮的接触长度，所以传递的转矩必受限制. 皮带轮的几何关系如图 3-34 所示，我们须先解出 α 再运用式(3.1).

由于 $\sin\theta=\frac{11}{72}$，故 $\theta=8.80°$或 0.154 rad. 于是

$$\alpha = \pi - 2(0.154) = 2.834 \text{ rad}$$

由式(3.1)可求得皮带绷紧段上的拉力

$$|\boldsymbol{T}_2| = |\boldsymbol{T}_1| e^{\mu\alpha} = 160\ e^{0.25(2.834)} = 325 \text{ lb}$$

于是，所能传递的最大转矩为(325 lb − 160 lb)(4 in) = 660 lb·in.

补充习题

3.13 一梯子长 13 m，重 24.46 kg. 它的下端架在水平地面上，上端靠在一垂直墙上. 梯子与水平面成 50°角，所有接触面的摩擦因数均为 0.3. 梯子的重心在距下端 5 m 处. 一个 64 kg 的人爬上梯子. 求：在不致造成梯子开始滑动的条件下，此人所能爬的高度.

答案：4.24 m

3.14 两个物块放在一与水平成 25°的斜面上. 下面的物块(A)质量为 20 kg，上面的物块(B)质量为 80 kg. 物块 A 与斜面之间的摩擦因数为 0.30，物块 B 与斜面之间的摩擦因数为 0.75. 这两个物块之间有绳索相连，绳索与斜面不接触. 求绳索中的张力(一定要先核查两个物体是否能滑下斜面).

答案：$|\boldsymbol{T}|=29.7$ N

3.15 两个实心圆柱半径均为 20 cm，由一个半径为 10 cm 的短轴相连，如图 3-35 所示. 整个装置重 450 N. 圆柱与水平面之间的摩擦因数为 0.25，而垂直墙是光滑的. 一根绳索绕在轴上，一重物 W 悬挂在绳索下端. 求：滑动即将开始时，W 的大小

答案：450 N

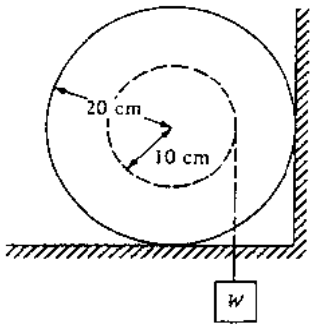


图 3-35

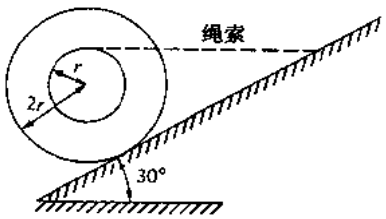


图 3-36

3.16 一对半径均为 2 r 的轮子联结在一半径为 r 的短轴两端. 整个系统放在一与水平成 30°角的斜面上，并由一根水平绳索保持平衡，如图 3-36 所示. 两个轮子和短轴总重为 W. 求：绳索中的张力以及轮子与斜面之间摩擦因数的最小值.

答案：0.366 W；0.174

3.17 两根直杆 AB 和 BC 在 B 处用圆柱铰链连接，如图 3-37 所示. 上端 A 与垂直墙铰接，C 端靠在一摩擦因数为 0.60 的粗糙垂直墙上. 杆 AB 重 $2W$，杆 BC 重 W. 每根杆长均为 L. 求系统保持平衡时，角 θ 最大值.

答案：39.6°

3.18 一质量为 30 kg 的实心圆柱放在一个由两道斜面构成的粗糙槽内，如图 3-38 所示求：使圆柱即将开始转动的垂直力 $\boldsymbol{P}$ 的最小值. 所有接触面处的摩擦因数均为 0.2.

答案：109 N

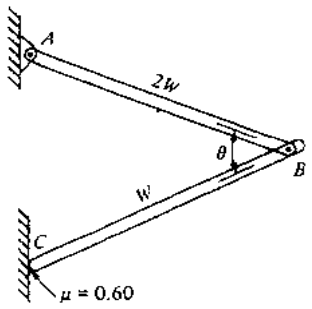


图 3-37

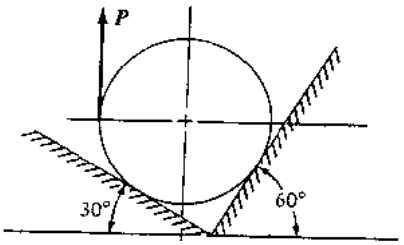


图 3-38

3.19　应用于某些制造业的简单机械系统中，一块薄的平板在一平面上拖动，如图 3-39 所示. 偶尔需要使加工过程停下来. 这个动作可通过压下一重量不计的圆柱滚轮来实现. 接触面之间的摩擦因数为 μ. 求：μ 的最小值，此时不论拉力 T 有多大，都不能将平板拉动.

答案：$\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\tan\dfrac{\alpha}{2}$

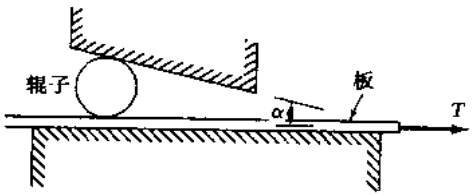


图 3-39

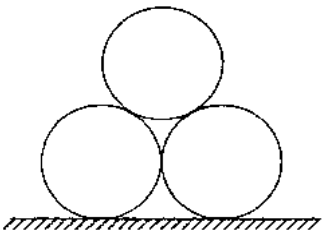


图 3-40

3.20　三个半径均为 r 重均为 W 的实心圆柱放在水平面上，每个圆柱都与其他两个圆柱相接触，如图 3-40 所示. 所有接触面之间的摩擦因数均为 μ. 求使三个圆柱在图示位置保持平衡的 μ 的最小值.

答案：0.268

3.21　重解题 3.11，求：当 $\phi=35°$ 时，使三角形石块即将开始滑动的临界高度 H.

答案：111 ft

3.22　如图 3-41 所示，一条缆绳绕过一圆杆，接触面之间的摩擦因数为 0.35. 10 000 N 的力作用于缆绳的一端. 求：欲保持系统平衡，重物 W 的最大和最小质量.

答案：3058 kg，340 kg

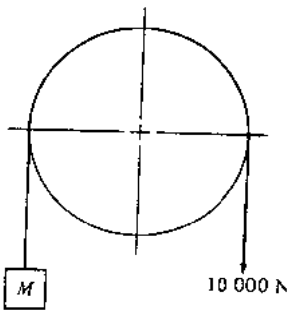


图 3-41

第四章　空间力系作用下物体的平衡

作用在刚体上的空间力系可能具有三种类型，它们是：

1．空间平行力系，提供三个静平衡方程(见例题 4.1 至 4.4)；

2．空间共点力系，也提供三个平衡方程(见例题 4.5)；

3．一般空间力系，提供六个平衡方程(见例题 4.6 至 4.9)．

在这一章中，我们将求解所有这三种类型力系的问题，而且主要利用矢量方法来求解．对于空间力系的问题，矢量方法几乎总是比标量方法更有效．

为方便起见，在这一章中我们用 F 来表示矢量 $\boldsymbol{F}$ 的大小，而不是用 $|\boldsymbol{F}|$，请读者注意．

例　题

4.1　一块形状为等腰三角形的金属薄板 ABC 位于水平面内(xz 平面)，如图 4-1 所示．它由三根垂直的缆绳保持平衡，在三角形板的对称轴上 E 点作用 -800N 垂直向下的力．求每根缆绳中的张力．板的重量不计．

解　由对 D 点力矩的平衡，有

$$\sum M_D = (-0.2\boldsymbol{k}) \times (-800\boldsymbol{j}) + (-0.3\sqrt{3}\boldsymbol{k}) \times (T_3\boldsymbol{j}) + (0.3\boldsymbol{i}) \times (T_2\boldsymbol{j}) + (-0.3\boldsymbol{i}) \times (T_1\boldsymbol{j}) = 0$$

利用式(1.6)，得

$$-160\boldsymbol{i} + 0.3\sqrt{3}T_3\boldsymbol{i} + 0.3T_2\boldsymbol{k} - 0.3T_1\boldsymbol{k} = 0$$

将单位矢量 $\boldsymbol{i}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 的系数分别集中起来，我们知道，在平衡的情况下，每个单位矢量的系数必为零．于是得两个方程：

$$(-160 + 0.3\sqrt{3}T_3)\boldsymbol{i} = 0 \text{ 和 } (0.3T_2 - 0.3T_1)\boldsymbol{k} = 0$$

可解出 $T_3 = 308\text{N}$ 和 $T_1 = T_2$．

最后，由力系在垂直方向的平衡，有

$$\sum F = T_1\boldsymbol{j} + T_2\boldsymbol{j} + T_3\boldsymbol{j} - 800\boldsymbol{j} = 0$$

代入上面解得的结果，得 $T_1 = T_2 = 246\text{N}$．

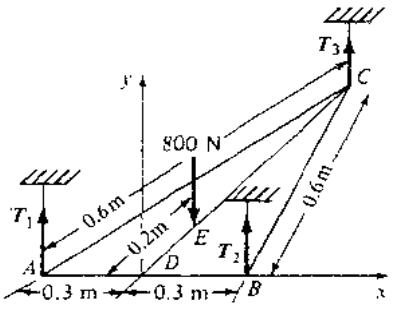


图 4-1

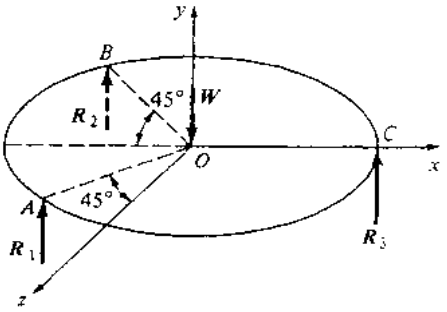


图 4-2

4.2　一块圆平板在其圆周上的三点支撑下位于水平面内(xz 平面)，如图 4-2 所示．板的重量为 W．求每个约束反力的大小．

解　设圆板半径为 a，如顶视图 4-3 所示．于是，由对 O 点力矩的平衡，有

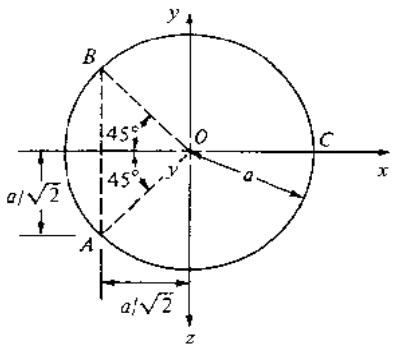


图 4-3

$$\sum M_0 = \sum(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}) - \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}+\frac{a}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\times(R_1\boldsymbol{j}) + \left(-\frac{a}{\sqrt{2}}\boldsymbol{i}-\frac{a}{\sqrt{2}}\boldsymbol{k}\right)\times(R_2\boldsymbol{j}) + (a\boldsymbol{i})\times(R_3\boldsymbol{j}) = 0$$

展开并利用式(1.6),得

$$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}R_1+\frac{a}{\sqrt{2}}R_2\right)\boldsymbol{i}=0$$

和

$$\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}R_1-\frac{a}{\sqrt{2}}R_2+aR_3\right)\boldsymbol{k}=0$$

解之,得 $R_1=R_2$ 和 $R_3=\sqrt{2}R_1$. 然后,由力系平衡,有

$$\sum\boldsymbol{F}=R_1\boldsymbol{j}+R_2\boldsymbol{j}+R_3\boldsymbol{j}-W\boldsymbol{j}=0$$

解之,得 $R_1=R_2=0.292W$ 和 $R_3=0.414W$.

4.3　一质量为 400 kg 的物块被绕在直径为 1 m 的圆鼓上的无重柔索吊在空中,如图 4-4 所示. 圆鼓与一刚性轴同心联结,轴在 A、B 两处由无摩擦的轴承支撑. 曲柄 BCD 位于垂直平面内(xy 平面),并受一与 z 轴平行的水平力 $\boldsymbol{F}$ 作用. 圆鼓的质量为 100 kg,轴和曲柄的质量可略去不计. 求:能使 400 kg 质量的物块保持平衡的力 $\boldsymbol{F}$ 的大小(不计摩擦).

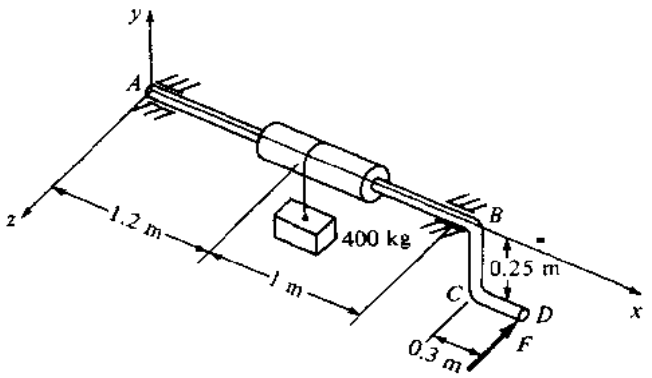


图 4-4

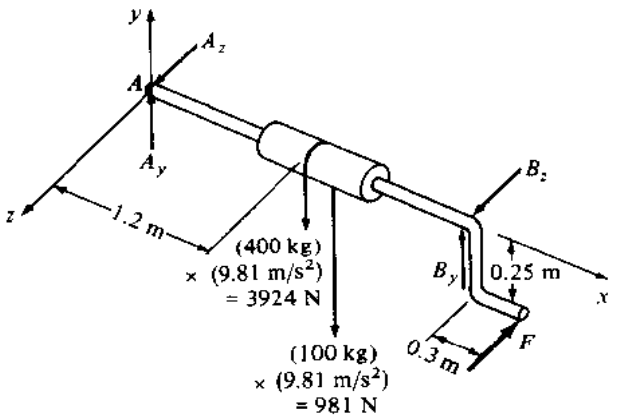


图 4-5

解　图 4-5 是包括轴、圆鼓和曲柄在内的系统的分离体图. 因为轴承无摩擦,故 A、B 两处对轴的约束反力分量沿 y 和 z 方向. 由对 A 点力矩的平衡,有

$$\sum M_A=(1.2\boldsymbol{i})\times(-981\boldsymbol{j})+(1.2\boldsymbol{i}+0.5\boldsymbol{k})\times(-3924\boldsymbol{j})+(2.2\boldsymbol{i})\times(B_z\boldsymbol{k})$$

$$+(2.2i)\times(B_y j)+(2.5i-0.25j)\times(-Fk)=0$$

展开后按 i、j 和 k 分项整理，得

$$(1962+0.25F)i=0,\qquad(-2.2B_z+2.5F)j=0$$

$$(-1177-4709+2.2B_y)k=0$$

由上面第一式解得 $F=-7848\text{N}$，说明力 $\boldsymbol{F}$ 沿 z 轴正向，而不是如图 4-5 所示沿 z 轴反方向.

4.4　在准备首次载人登月飞行时，需在佛罗里达州肯尼迪角比较平坦的地面上将土星-5 火箭推进器和它的控制塔搬运约 3.5 mi. 火箭及与其相连的控制塔总重 6 000 吨，高达 363 ft，其重心位于离推进器底部 140 ft 处. 一台专门设计的“履带式运输平台”用来搬运处于垂直状态的火箭和塔. 平台长 130 ft，宽 114 ft，四个角上均由一辆 41 ft 长的卡车支撑. 每辆卡车均安装数个齿轮，齿轮外包有柔性的传动履带，看起来酷似一辆坦克车. 运输平台重 2750 吨. 规定在微风影响下，火箭的顶端在水平方向上与其真正垂直位置偏离不得超过 0.5ft；也就是说，最大的偏离垂直位置的角度为 4 分. 求：当偏离角恰为 4 分时，前后卡车所承受的载荷.

解　火箭和它的控制塔以及履带式运输平台和四辆卡车的分离体图如图 4-6 所示. 该图显示，这是一个简单的空间平行力系问题，可以简化成一个二维问题来处理. 地面作用在每辆前卡车上的约束反力记为 $\boldsymbol{R}_A$，作用在每辆后卡车上的约束反力记为 $\boldsymbol{R}_B$.

首先须将 4 分角度转换成弧度：

$$4\text{ 分}\frac{1^\circ}{60\text{ 分}}\frac{1\text{ rad}}{57.3^\circ}=0.00116\text{ rad}$$

据此，我们可算出推进器和塔的重心的最大水平位移约为

$$(140\text{ ft})(0.00116\text{rad})=0.1624\text{ ft}$$

故由平衡可列方程

$$+\circlearrowright\sum M_A=(2750\text{ 吨})(65\text{ ft})+(6000\text{ 吨})(65\text{ ft}+0.1624\text{ ft})$$

$$-2|\boldsymbol{R}_B|(130\text{ ft})=0$$

解之，得 $|\boldsymbol{R}_B|=2191$ 吨. 然后，由垂直方向力的平衡，有

$$\sum F_y=2|\boldsymbol{R}_A|+2(2191)-2750-6000=0$$

解得 $|\boldsymbol{R}_A|=2184$ 吨.

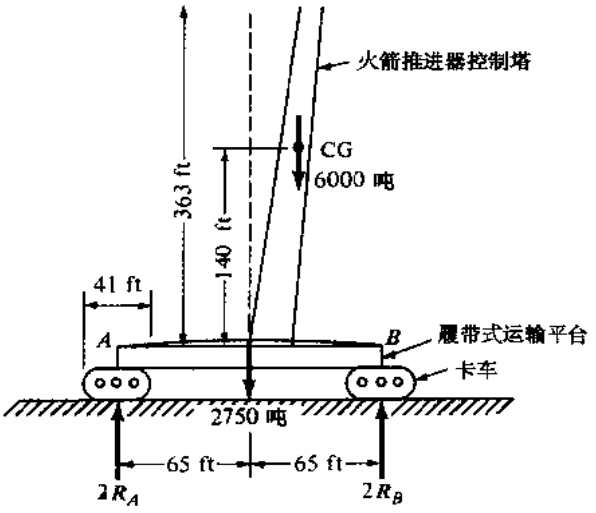


图 4-6

4.5　在图 4-7 中，杆 DA、DC 和 DB 在 D 点由球铰连在一起，各杆的下端坐落在无摩擦的轴承上，构成一类似三角架的结构. 结构承受一 2000N 的与 x 轴平行的水平力作用，方向

如图所示.求:各杆中的力,杆的重量忽略不计.

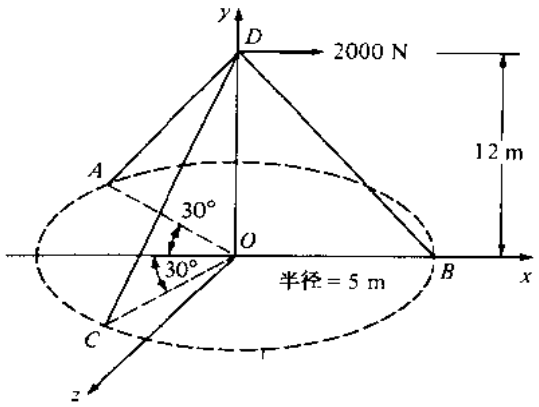


图 4-7

解　每一根杆在 D 点的力和各自下端轴承约束反力的作用下都保持平衡.故每一根杆均为二力构件,杆内的力必沿其中心线.如果我们在低于 D 点而高于 xz 平面的范围内用任意水平面来截断三根杆,则杆的内力暴露出来成为外力,如分离体受力如图 4-8 所示.

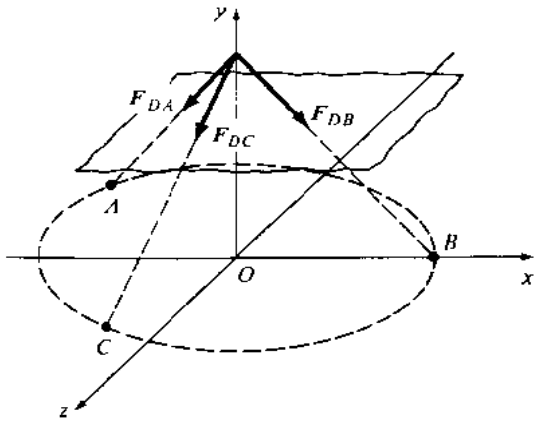


图 4-8

因为杆 DB 的长度为 $\sqrt{5^2+12^2}=13$ m,故杆 DB 中的力为

$$\boldsymbol{F}_{DB}=\frac{F_{DB}}{13}(5\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k})$$

式中 F_{DB} 表示未知力 $\boldsymbol{F}_{DB}$ 的大小.

同样,杆 DC 和 DA 中的力为

$$\boldsymbol{F}_{DC}=\frac{F_{DC}}{13}[-5(\cos 30^\circ)\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+5(\sin 30^\circ)\boldsymbol{k}]$$

和

$$\boldsymbol{F}_{DA}=\frac{F_{DA}}{13}[-5(\cos 30^\circ)\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-5(\sin 30^\circ)\boldsymbol{k}]$$

由力的平衡,有

$$\sum \boldsymbol{F}=2000\boldsymbol{i}+\frac{F_{DB}}{13}(5\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j})+\frac{F_{DC}}{13}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}+\frac{5}{2}\boldsymbol{k}\right)$$
$$+\frac{F_{DA}}{13}\left(-\frac{5\sqrt{3}}{2}\boldsymbol{i}-12\boldsymbol{j}-\frac{5}{2}\boldsymbol{k}\right)=0$$

按 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分项整理,得三个方程:

$$\left(2000+\frac{5F_{DB}}{13}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\frac{F_{DC}}{13}-\frac{5\sqrt{3}}{2}\frac{F_{DA}}{13}\right)i=0$$

$$\left(-\frac{12}{13}F_{DB}-\frac{12}{13}F_{DC}-\frac{12}{13}F_{DA}\right)j=0$$

$$\left(\frac{5}{2}\frac{F_{DC}}{13}-\frac{5}{2}\frac{F_{DA}}{13}\right)k=0$$

解之，得 $F_{DC}=F_{DA}=1393\text{N}$ 和 $F_{DB}=-2786\text{N}$. F_{DB}中的负号说明原先假设的方向不对，此杆中的力为压力而不是拉力.

4.6　一扇装有铰链的门正好封闭一贮藏室的入口. 此门由一根固结在垂直墙上 F 点的绳索 EF 拉着，保持入口敞开，如图 4-9 所示. 门的质量 200 kg，A、B 两处的铰链无摩擦. 求绳索中的张力.

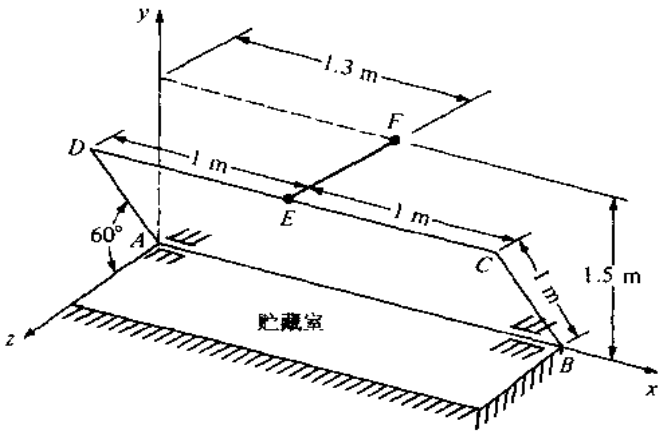


图 4-9

解　门的分离体受力图如图 4-10 所示. 为排除铰链约束反力的力矩，我们列出对 AB 边的力矩平衡方程. 根据式(1.13)，欲求对某轴之矩，我们先要求得对该轴上某一点之矩，然后取该力矩矢量与该轴上单位矢量(本题中即沿 AB 方向的单位矢量)的点积(标量积).

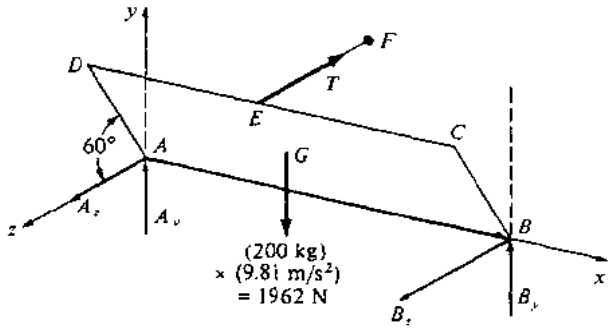


图 4-10

沿 AB 方向的单位矢量为 $\boldsymbol{\lambda}_{AB}=i$. 因为只有重力和绳索中的张力对轴 AB 有矩，故有

$$\sum M_{AB}=\boldsymbol{\lambda}_{AB}\cdot(\boldsymbol{r}_{E/A}\times\boldsymbol{T})+\boldsymbol{\lambda}_{AB}\cdot(\boldsymbol{r}_{G/A}\times\boldsymbol{W})=0 \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{r}_{E/A}$表示从 A 点到 E 点的矢量(E 点是绳索张力作用线上的一点)，而 $\boldsymbol{r}_{G/A}$表示从 A 点到 G 点的矢量(G 点是重力作用线上的一点). 注意，在此两根力的作用线上任何可以使运算方便的点均可采用，挑选的原则是在给定的几何关系条件下，使运算简单.

式(1)中的叉积对应各力对 A 点之矩，而点积对应各力对轴 AB 之矩. 因为 A、B 两处铰链的约束反力通过轴 AB，故它们对力矩关系式(1)没有贡献.

由几何关系，有

$$\boldsymbol{r}_{E/A} = 1\boldsymbol{i} + 1(\sin 60^\circ)\boldsymbol{j} + 1(\cos 60^\circ)\boldsymbol{k} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{r}_{G/A} = 1\boldsymbol{i} + 0.5(\sin 60^\circ)\boldsymbol{j} + 0.5(\cos 60^\circ)\boldsymbol{k} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{EF} = 0.3\boldsymbol{i} + (1.5 - 1\sin 60^\circ)\boldsymbol{j} + (-1)(\cos 60^\circ)\boldsymbol{k} \tag{4}$$

重力矢量为 $-1962\boldsymbol{j}$，而绳索张力矢量为

$$\boldsymbol{T} = \frac{T}{\boldsymbol{EF}} = \frac{[0.3\boldsymbol{i} + (1.5 - \sin 60^\circ)\boldsymbol{j} - \cos 60^\circ \boldsymbol{k}]T}{\sqrt{(0.3)^2 + (0.634)^2 + (0.5)^2}}$$

$$= (0.348\boldsymbol{i} + 0.736\boldsymbol{j} - 0.581\boldsymbol{k})T \tag{5}$$

据式(1.12)，三重混合积可由下式计算：

$$\boldsymbol{P} \cdot (\boldsymbol{Q} \times \boldsymbol{R}) = \begin{vmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{vmatrix}$$

式中 $\boldsymbol{P}$ 对应于式(1)中的 $\boldsymbol{\lambda}_{AB}$，$\boldsymbol{Q}$ 对应 $\boldsymbol{r}_{E/A}$ 或 $\boldsymbol{r}_{G/A}$，$\boldsymbol{R}$ 对应 $\boldsymbol{T}$ 或重力 $\boldsymbol{W}$. 于是式(1)演化为

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.866 & 0.5 \\ 0.384 & 0.736 & -0.581 \end{vmatrix} T + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0.433 & 0.25 \\ 0 & -1962 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

解之，得 $T = 1126\text{N}$.

4.7 如图 4-11 所示，水平刚性吊杆 OB 受一垂直载荷 W 的作用，并被两根与垂直支撑墙连结的绳索吊住. 吊杆的支撑端受光滑球铰约束，并恰好落在图示坐标系的原点. 编制一个求解两根绳索张力的 FORTRAN 程序.

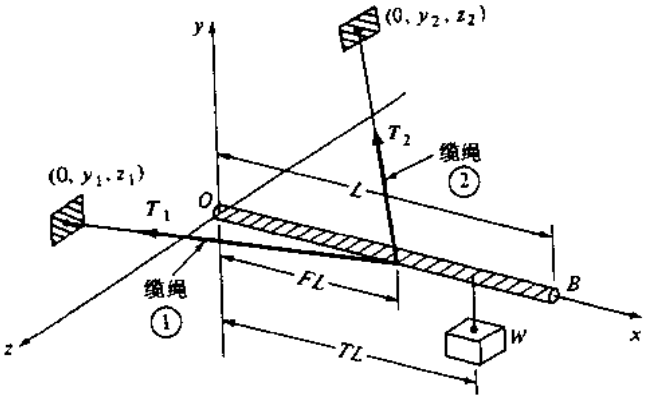


图 4-11

解 首先以矢量形式表示出两根绳索中的力：

$$\boldsymbol{T}_1 = |\boldsymbol{T}_1|\left(-\frac{FL}{CL_1}\boldsymbol{i} + \frac{y_1}{CL_1}\boldsymbol{j} + \frac{z_1}{CL_1}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\boldsymbol{T}_2 = |\boldsymbol{T}_2|\left(-\frac{FL}{CL_2}\boldsymbol{i} + \frac{y_2}{CL_2}\boldsymbol{j} + \frac{z_2}{CL_2}\boldsymbol{k}\right)$$

式中 CL_1 和 CL_2 分别是绳索①和②的长度. 然后，由平衡有

$$\sum M_0 = (FL)\boldsymbol{i} \times |\boldsymbol{T}_1|\left(-\frac{FL}{CL_1}\boldsymbol{i} + \frac{y_1}{CL_1}\boldsymbol{j} + \frac{z_1}{CL_1}\boldsymbol{k}\right)$$

$$+ (FL)\boldsymbol{i} \times |\boldsymbol{T}_2|\left(-\frac{FL}{CL_2}\boldsymbol{i} + \frac{y_2}{CL_2}\boldsymbol{j} + \frac{z_2}{CL_2}\boldsymbol{k}\right) + (TL)\boldsymbol{i} \times (-W)\boldsymbol{j}$$

$$= 0$$

展开并按 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分项整理，得标量方程：

$$\frac{(FL)y_1}{CL_1}T_1 - \frac{(FL)y_2}{CL_2}T_2 - (TL)W = 0$$

$$\frac{(FL)_{z_1}}{CL_1}T_1+\frac{(FL)_{z_2}}{CL_2}T_2=0$$

上面两个方程可表示成下列符号形式：

$$A(1,1)T_1-A(1,2)T_2=W$$

$$A(2,1)T_1+A(2,2)T_2=0$$

于是绳索张力不难求出，一个求解这类问题的 FORTRAN 程序编制如下：

```
00010       PROGRAM CRANE1(INPUT,OUTPUT)
00020C
00030C      PROGRAM CRANE 1 - - -  HORIZONTAL RIGID BOOM LOADED BY A VERTICAL
00040C      CONCENTRATED LOAD W AT AN ARBITRARY POINT AND SUSPENDED BY TWO
00050C      CABLES RUNNING FROM AN ARBITRARY POINT ON THE BOOM TO TWO ARBITRARY
00060C      POINTS ON THE VERTICAL WALL.  BOOM REST IN BALL - AND - SOCKET JOINT
00070C      AT ORIGIN OF COORDINATE SYSTEM AND RUNS ALONG X - AXIS.
00080C      L:  BOOM LENGTH
00090C      FL: DISTANCE FROM BALL - AND - SOCKET TO POINT OF ATTACHMENT OF CABLES
00100C      TL: DISTANCE FROM BALL - AND - SOCKET TO POINT OF VERTICAL LOAD
00110C      0,Y1,Z1:COORDINATES OF END OF CABLE 1 AT POINT OF ATTACHMENT
00120C              TO WALL
00130C      0,Y2,Z2:COORDINATES OF END OF CABLE 2 AT POINT OF ATTACHMENT
00140C              TO WALL
00150C
00160       DIMENSION A(10,10),B(10)
00170       PRINT * ,' ENTER THE COORDINATES OF THE END POINTS OF CABLES'
00180       PRINT * ,' CABLE 1:X1,Y1,Z1;CABLE 2:X2,Y2,Z2'
00190       READ( * , * )       X1,Y1,Z1,         X2,Y2,Z2
00200       PRINT * ,' ENTER LENGTH BTW SOCKET AND POINT LOAD APPLIED'
00210       READ( * , * )  TL
00220       PRINT * ,'  ENTER LENGTH BTW SOCKET AND POINT ROD ATTACHED'
00230       READ( * , * )  FL
00240       PRINT * ,'  ENTER THE LOAD'
00250       READ( * , * )  W
00260       W1 = (TL/FL) * W
00270       CL1 = SQRT((FL - X1) * *2 + Y1 * *2 + Z1 * *2)
00280       CL2 = SQRT((FL - X2) * *2 + Y2 * *2 + Z2 * *2)
00290       A(1,1) = Y1/CL1
00300       A(2,1) = Z1/CL1
00310       A(1,2) = Y2/CL2
00320       A(2,2) = Z2/CL2
00330       B(1) = W1
00340       B(2) = 0.
00350       CALL MATINV(A,2,B,1,DET,10)
00360       RX = (FL/CL1) * B(1) + (FL/CL2) * B(2)
00370       RY = W - W1
00380       DO 10 I = 1,2
00390  10   PRINT 100,I,B(I)
00400       PRINT 110
00410       PRINT 120
00420       PRINT 130,RX,RY,0
```

```
00430   100   FORMAT(/,10X,'THE TENSION IN CABLE',I2,'IS',F10.2)
00440   110   FORMAT(//,10X,'THE REACTION AT BALL AND SOCKET')
00450   120   FORMAT(/,10X,'COMPONENTS IN X,Y,Z DIRECTION')
00460   130   FORMAT(/,10X,'X:',F8.2,'  Y:',F8.2,'  Z:',F8.2)
00470         END
```

尽管图 4-11 上载荷作用点是在绳索吊挂点的右侧，但上述程序对这两个点的任意相对位置都适用.

4.8 对例题 4.7 中的吊杆，设 $y_1 = 15\text{ft}$，$x_1 = 16\text{ft}$，$y_2 = 12\text{ft}$ 和 $z_2 = -13\text{ft}$. 设一 8000lb 的载荷作用在距球铰 20ft 的地方，而绳索在 OB 上的吊挂点距球铰 25ft. 利用上述 FORTRAN 程序求绳索中的张力.

解 我们只需输入坐标以及 FL 和 TL 的长度. 程序会提供如下输出：

```
 ENTER THE COORDINATES OF THE END POINTS OF CABLES
 CABLE 1:X1,Y1,Z1; CABLE 2:X2,Y2,Z2
?  0,15,16,0,12,-13
 ENTER LENGTH BTW SOCKET AND POINT LOAD APPLIED
?  20
 ENTER LENGTH BTW SOCKET AND POINT ROD ATTACHED
?  25
 ENTER THE LOAD
?  8000

    THE TENSION IN CABLE 1 IS 7149.73
    THE TENSION IN CABLE 2 IS 8103.83
```

4.9 图 4-12 中，刚性垂直杆 OA 支撑刚性杆件 FD，杆件 FD 又通过一根水平绳索 ED 拉回来系在杆 OA 上. 在 O 点有一球铰. 平面 FDE 与 xy 平面成 α 弧度角. 杆的上端 A 由两根绳索锚定在 xz 平面内，一垂直载荷 $\boldsymbol{P}$ 作用于杆件 FD 的末端. 编制一 FORTRAN 程序求解绳索①和②中的力.

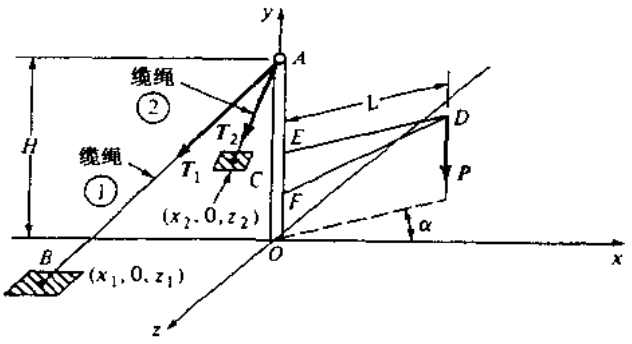


图 4-12

解 首先以单位矢量的形式表示出两根绳索中的力：

$$\boldsymbol{T}_1 = |\boldsymbol{T}_1|\left(\frac{X_1}{CL_1}\boldsymbol{i} - \frac{H}{CL_1}\boldsymbol{j} + \frac{Z_1}{CL_1}\boldsymbol{k}\right)$$

$$\boldsymbol{T}_2 = |\boldsymbol{T}_2|\left(\frac{X_2}{CL_2}\boldsymbol{i} - \frac{H}{CL_2}\boldsymbol{j} + \frac{Z_2}{CL_2}\boldsymbol{k}\right)$$

式中 CL_1 和 CL_2 分别是绳索①和②的长度. 由平衡,

$$\sum \boldsymbol{M}_O = H\boldsymbol{j} \times |\boldsymbol{T}_1| \left(\frac{X_1}{CL_1}\boldsymbol{i} - \frac{H}{CL_1}\boldsymbol{j} + \frac{Z_1}{CL_1}\boldsymbol{k} \right) + H\boldsymbol{j} \times |\boldsymbol{T}_2| \left(\frac{X_2}{CL_2}\boldsymbol{i} - \frac{H}{CL_2}\boldsymbol{j} + \frac{Z_2}{CL_2}\boldsymbol{k} \right)$$
$$+ [L(\cos\alpha)\boldsymbol{i} - L(\sin\alpha)\boldsymbol{k}] \times (-P\boldsymbol{j}) = 0$$

展开并按 $\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分项整理,得标量方程:

$$\frac{HZ_1}{CL_1}T_1 + \frac{HZ_2}{CL_2}T_2 = PL\sin\alpha$$

$$\frac{HX_1}{CL_1}T_1 + \frac{HX_2}{CL_2}T_2 = -PL\cos\alpha$$

这两个方程可写成下列符号形式:

$$A(1,1)T_1 + A(1,2)T_2 = B(1)$$
$$A(2,1)T_1 + A(2,2)T_2 = B(2)$$

一个求解这类问题的 FORTRAN 程序编制如下:

```
00010       PROGRAM CRANE2(INPUT,OUPUT)
00020C
00030C      PROGRAM CRANE2 - - - - VERTICAL RIGID MAST OF HEIGHT H ALONG
00040C      Y - AXIS WITH BASE IN BALL - AND - SOCKET JOINT AT ORIGIN OF XYZ
00050C      COORDINATE SYSTEM. RIGID BOOM ATTACHED ABOVE ORIGIN WITH
00060C      HORIZONTAL PROJECTION L IS SUBJECTED TO VERTICAL FORCE P
00070C      AT EXTREMITY. MAST BRACED BY TWO CABLES FROM TOP OF MAST TO
00080C      TWO ARBITRARY POINT IN THE X - Z PLANE.
00090C              H:MAST HEIGHT
00100C              L:PROJECTION OF BOOM LENGTH ON X - Z PLANE
00110C          ALPHA:ANGLE OF PLANE OF BOOM AND MAST WITH X - AXIS
00120C      X1,0,Z1:COORDINATES OF END OF CABLE 1 AT POINT OF
00130C              ATTACHMENT TO XZ PLANE
00140C      X1,0,Z1:COORDINATES OF END OF CABLE 1 AT POINT OF
00150C              ATTACHMENT TO XZ PLANE
00160
00170       DIMENSION A(10,10),B(10)
00180       PRINT * ,' ENTER THE COORDINATES OF THE END POINTS OF CABLES'
00190       PRINT * ,' CABLE 1: X1,Z1,;CABLE 2:X2,Z2'
00200       READ( * , * )          X1,Z1,          X2,Z2
00210       PRINT * ,' ENTER LENGTH OF BAR'
00220       READ( * , * ) H
00230       PRINT * ,' ENTER LENGTH OF L'
00240       READ( * , * ) L
00250       PRINT * ,' ENTER THE ANGLE'
00260       READ( * , * ) ANG
00270       PRINT * ,' ENTER THE LOAD
00280       READ( * , * ) P
00290       CL1 = SQRT(X1 * * 2 + H * * 2 + Z1 * * 2)
00300       CL2 = SQRT(X2 * * 2 + H * * 2 + Z2 * * 2)
00310       A(1,1) = Z1 * H/CL1
00320       A(2,1) = X1 * H/CL1
00330       A(1,2) = Z2 * H/CL2
00340       A(2,2) = X2 * H/CL2
00350       B(1) =   P * L * SIN(ANG)
00360       B(2) = - P * L * COS(ANG)
```

```
00370        CALL MATINV(A,2,B,1,DET,10)
00380        DO 10 I = 1,2
00390   10   PRINT 100,I,B(I)
00400  100   FORMAT(/,10X,'THE TENSION IN CABLE ',I2,' IS ',F10.2)
00410        END
```

4.10 对图 4-12 中的吊杆，设 $x_1=-20\text{ft}$，$z_1=18\text{ft}$，$x_2=-25\text{ft}$ 和 $z_2=-22\text{ft}$. 设杆 OA 高 10ft，杆件 FD 长 7.5ft，角 α 为 0.25rad，作用于 D 的载荷为 12 000lb. 利用上述 FORTRAN 程序求绳索①和②中的力.

解 在回答程序的提示时，我们输入给定的参数，得到如下结果：

```
 ENTER THE COORDINATES OF THE END POINTS OF CABLES
 CABLE 1:X1,Z1;CABLE 2:X2,Z2
?  -20,18,-25,-22
 ENTER LENGTH OF BAR
?  10
 ENTER LENGTH OF L
?  7.5
 ENTER THE ANGLE
?  0.25
 ENTER THE LOAD
?  12 000
 THE TENSION IN CABLE 1 IS 7450.82
 THE TENSION IN CABLE 2 IS 4099.65
```

补 充 习 题

4.11 一重为 W 的正方形板 $ACEF$ 放在水平面内(图 4-13)，在 D、G 两点板被细线吊住，在 B 点被一短柱撑住. 求细线和短柱中的力.

答案：$T_D=T_G=\frac{2}{3}W$；　$T_B=\frac{1}{3}W$

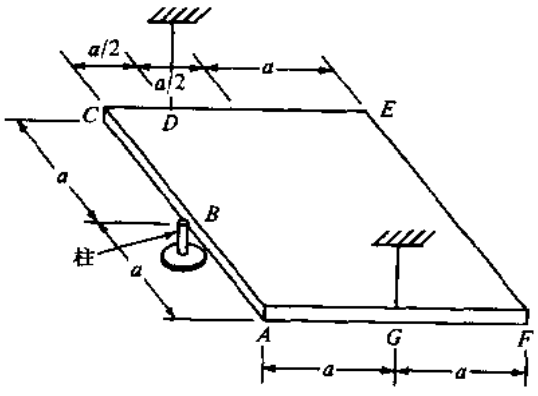


图 4-13

4.12 图 4-14 中，刚性轴 AD 在 A、C 两处由无摩擦轴承支撑. 在轴上 B、D 两处用键固接两个滑轮，每个滑轮半径为 0.15m. 传动带拉力包括在 B 点的两个平行于 z 轴的力，和在 D 点的两个平行于 y 轴的力. 忽略轴和滑轮的重量，求：处于平衡时，轴承的约束反力和力 P 的大小.

答案：$|\boldsymbol{P}| = 875$ N；$A_z = 87.5$ N；$A_y = -612$ N；$C_z = 87.5$ N；$C_y = 1837$ N

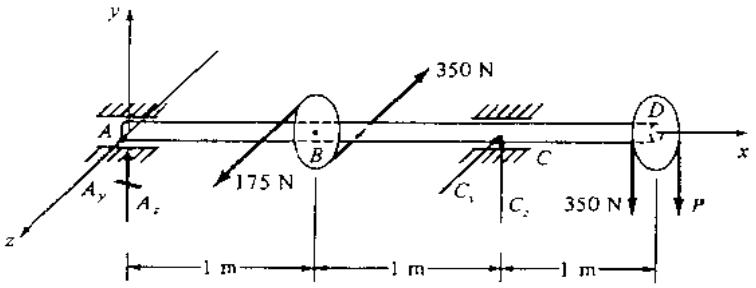


图 4-14

4.13 对例题 4.5 中类似三角架的结构，设作用于 D 点的载荷为 $\boldsymbol{F} = (800\boldsymbol{k} - 1200\boldsymbol{i})$ N. 忽略杆的重量，求每根杆中的力.

答案：$F_{DC} = -2824$ N；$F_{DB} = 1488$ N；$F_{DA} = 1336$ N

4.14 图 4-15 中，一个三杆桁架的三根杆件 AB、AD 和 AE 在 A 点用无摩擦球铰约束，在同一点作用有 1 000 N的垂直载荷. 杆件 AB 和 AD 在水平面内（xz 平面）. 忽略杆的重量，求每根杆中的力.

答案：$F_{AB} = F_{AD} = 559$ N；$F_{AE} = -1414$ N

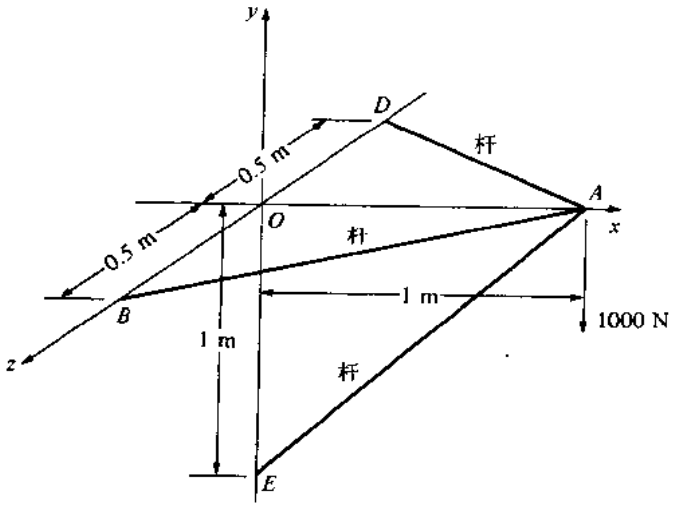


图 4-15

4.15 对图 4-11 中的吊杆，设绳索与垂直墙固结点的位置为(0, 14 ft, 28 ft)和(0, 23 ft, −25 ft). 设 −12 000lb 的载荷向下作用在距球铰 35ft 的地方，而绳索与杆的连结点距球铰 30ft. 利用计算机程序求绳索中的张力.

答案：15 270 lb；17 880 lb

4.16 对例题 4.9 中的吊杆，设缆绳与地面锚结点的位置为(−4.7 m, 0, 5.9 m)和(−5.2 m, 0, −6.1 m)；杆 OA 高 4.8 m，L 长为 3.9 m；平面 FDE 与 xy 平面夹角为 0.30 rad；作用于 D 点的垂直载荷为 80 000 N. 利用计算机程序求缆绳中的张力.

答案：55 470 N；33 430 N

第五章　桁　　架

桁架是长直杆的二维或三维组合体.假如所有的杆都在同一平面内,则杆的两端由无摩擦的销钉连结,连结点称为节点.若杆是分布在三维空间,则杆与杆由无摩擦球铰连结.在初步分析中我们通常忽略桁架本身的重量.因为每根杆只在两个端点受力,所以每根杆都是二力构件,它们不是处于受拉状态(图 5-1(a))就是处于受压状态(图 5-1(b)).作用在杆两端的拉力或压力会传过整根杆,且大小和方向均不改变.杆中的力通常用标注杆两个端点的字母来表示,所以图 5-1 中的力 $\boldsymbol{P}$ 可以表示成 $\boldsymbol{AB}$.

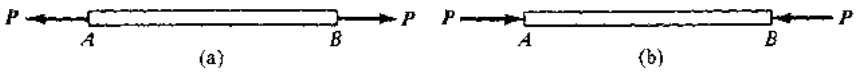


图 5-1

对于平面桁架,一旦外力确定下来,则有两个简单的分析方法来求各杆中的力.这两个方法是:

1. *节点法*　若在桁架的某一节点上,相交杆中受力未知的杆不超过两根,这样的点就可选作分析.对于这样的共点力系,可列出两个独立的平衡方程,故两根受力未知的杆可以求解.重复这一过程,直到所有杆的受力全部求得(见例题 5.1 和 5.4).

2. *截面法*　用一假想的平面去截一平面桁架,使被截的杆中受力未知的杆不超过三根.在这种情况下可列出三个平衡方程,故三根受力未知的杆可以求解(见例题 5.2 和 5.3).

对空间桁架,这两种分析方法也都可用,只需稍作修改(见例题 5.5).

杆中的拉力始终认为是正的,压力则认为是负的.从这一符号规定来看,在解得结果之前最简单的处理是将所有未知杆力全部设为拉力.若求得的值为正,则果真是拉力;若求得的值为负,则应该是压力.另外,比如说 10kN 的拉力通常表示成 10kN(T),而 18kN 的压力则表示成 18kN(C).

对于有许多杆件的桁架来说,求解所有杆件的受力显然是十分冗长繁琐的计算.因此,设计人员通常采用计算机分析法.大多数具有一般数量杆件的平面(二维)桁架可以用一简单程序分析,程序通常用 FORTRAN 语言编制(见例题 5.6).

例　　题

5.1　图 5-2 中,一架三节悬臂式桁架在 E 点用圆柱铰链约束,并用一杆件 DF 系在垂直墙上.求:在 A 点的垂直载荷 $\boldsymbol{P}$ 的作用下,各杆的内力.

解:杆件 DF 只是在两端受力,所以是二力构件,内力必沿其长度方向.这样,整个桁架的分离体图如图 5-3 所示.由桁架整体的平衡,有

$$+\circlearrowleft \sum M_E = -|\boldsymbol{DF}|L\sin 60^\circ - |\boldsymbol{P}|(2L) = 0 \quad \text{或} \quad |\boldsymbol{DF}| = 2.309|\boldsymbol{P}|\ (\mathrm{T})$$

$$\sum F_x = -E_x + |\boldsymbol{DF}| = 0 \qquad \text{或} \quad E_x = 2.309|\boldsymbol{P}|$$

因为几何关系简单并且要求解所有杆的内力,我们采用节点法.我们只能从节点 A 着手求解,因为这是惟一的只含两根受力未知杆的节点,其余的节点上含有受力未知杆的数目均超过两根.节点 A 的分离体图如图 5-4 所示,图中受力未知杆的内力均假设为拉力.由平衡条件,有

$$\sum F_y = |\boldsymbol{AB}|\sin 60^\circ - |\boldsymbol{P}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{AB}| = 1.155|\boldsymbol{P}|\ (\mathrm{T})$$

$$\sum F_x = |\boldsymbol{AC}| + |\boldsymbol{AB}|\cos 60^\circ = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{AC}| = -0.577|\boldsymbol{P}|\text{ (C)}$$

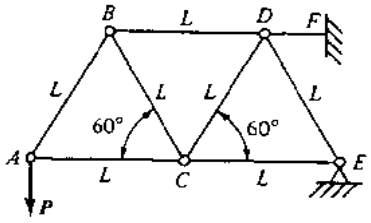


图 5-2

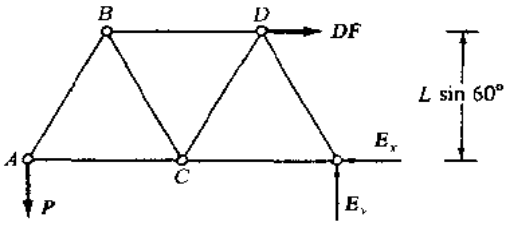


图 5-3

上述结果告诉我们，内力 $\boldsymbol{AB}$ 是拉力，$\boldsymbol{AC}$ 是压力.

现在我们可以来分析节点 B，因为在该节点上现在只有两根杆内力未知. 节点 B 的分离体图如图 5-5 所示. 由平衡条件，有

$$\sum F_y = -1.155|\boldsymbol{P}|\sin 60^\circ - |\boldsymbol{BC}|\sin 60^\circ = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{BC}| = -1.155|\boldsymbol{P}|\text{ (C)}$$

$$\sum F_x = |\boldsymbol{BD}| + |\boldsymbol{BC}|\cos 60^\circ - 1.155|\boldsymbol{P}|\cos 60^\circ = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{BD}| = 1.155|\boldsymbol{P}|\text{ (T)}$$

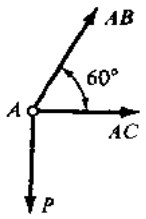


图 5-4

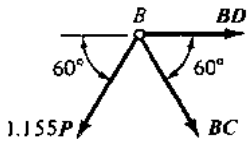


图 5-5

接下来分析节点 C(见图 5-6). 最简单的方法是将杆 BC 和 AC 中的力表示为压力(正如求解出的那样). 由平衡条件，有

$$\sum F_y = -1.155|\boldsymbol{P}|\sin 60^\circ + |\boldsymbol{CD}|\sin 60^\circ = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{CD}| = 1.155|\boldsymbol{P}|\text{ (T)}$$

$$\sum F_x = |\boldsymbol{CE}| + |\boldsymbol{CD}|\cos 60^\circ + 1.155|\boldsymbol{P}|\cos 60^\circ + 0.577|\boldsymbol{P}| = 0$$

$$\text{或 } |\boldsymbol{CE}| = -1.732|\boldsymbol{P}|\text{ (C)}$$

最后，节点 D 的分离体图如图 5-7 所示. 由平衡条件，有

$$\sum F_y = -1.155|\boldsymbol{P}|\sin 60^\circ - |\boldsymbol{DE}|\sin 60^\circ = 0, \text{或 } |\boldsymbol{DE}| = -1.155|\boldsymbol{P}|\text{ (C)}$$

作为计算结果的核对，我们现在应该分析节点 E. 已经求得的杆的内力与圆柱铰链的约束反力应能保持该节点垂直和水平方向的平衡. 这一核对工作在书中恕不列出了.

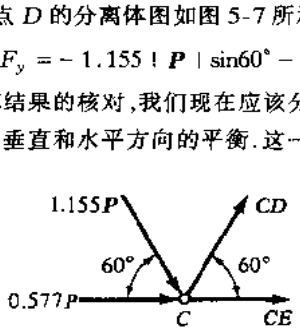


图 5-6

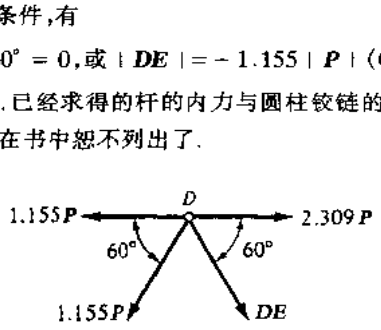


图 5-7

5.2 图 5-8 中，三角形桁架在图示位置受三个垂直载荷作用. 求杆 BD、CD 和 CE 中的力.

解 由桁架的对称性，我们可知每个支撑端的约束反力是 1.5 kN 垂直方向的力. 我们将采用截面法解此题，即用一垂直方向的面截断感兴趣的三根杆. 截面左侧部分桁架的分离体图如图 5-9 所示.

从对节点 C 的力矩方程着手是比较方便的，因为受力未知的杆中有两根相交于该点.

$$+\circlearrowright \sum M_C = |\boldsymbol{BD}|(1.5\text{ m}) - (1\text{ kN})(1.5\text{ m})\cos 60^\circ + (1.5\text{ kN})(3\text{ m}) = 0,$$

解之，得 $|\boldsymbol{BD}| = -2.5\ \text{kN(C)}$.

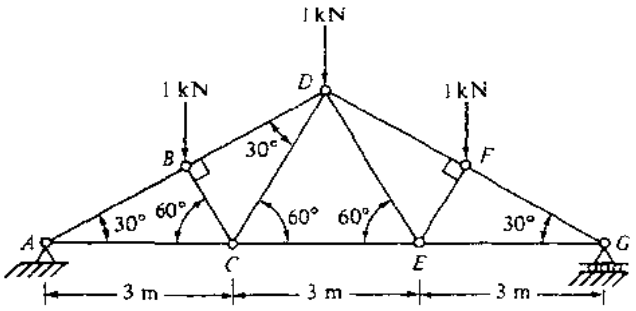


图 5-8

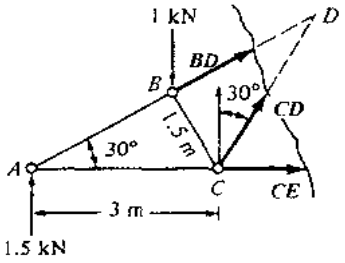


图 5-9

接下来取对节点 A 的力矩方程，因为另外两根杆的内力相交于该点. 力 $\boldsymbol{CD}$ 的垂直分量为 $|\boldsymbol{CD}|\cos30°$，故

$$+\circlearrowleft \sum M_A = (1\ \text{kN})[(3 - 1.5\cos60°)\ \text{m}] - |\boldsymbol{CD}|(\cos30°)(3\ \text{m}) = 0,$$

解之，得 $|\boldsymbol{CD}| = 0.866\ \text{kN(T)}$.

还有另外两根杆的内力交于节点 D.（我们可以对即使不属于分离体上的点也能写出力矩平衡方程，因为在平衡状态下，分离体中所有的力对该平面上任何一点的力矩之和都应为零.）于是就有

$$+\circlearrowleft \sum M_D = (1.5\text{kN})(4.5\text{m}) - (1\text{kN})[(1.5 + 1.5\cos60°)\text{m}] - |\boldsymbol{CE}|[(3\sin60°)\text{m}] = 0$$

解得 $|\boldsymbol{CE}| = 1.73\text{kN(T)}$

5.3　一矩形桁架由九根杆组成，结构如图 5-10 所示，且在 E 点作用一垂直载荷 $\boldsymbol{P}$. 求杆 CD、AB 和 EF 的内力.

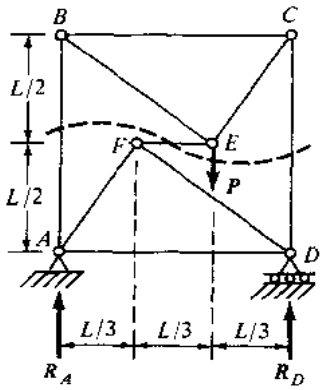


图 5-10

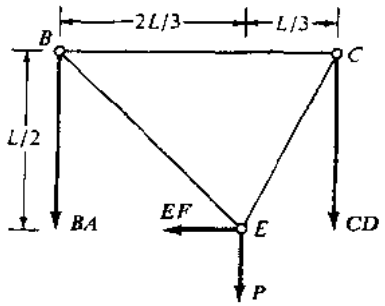


图 5-11

解　A、D 两端的约束反力可由下面方程求得：

$$+\circlearrowleft \sum M_A = -|\boldsymbol{R}_D|L + |\boldsymbol{P}|\left(\frac{2}{3}L\right) = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{R}_D| = \frac{2}{3}|\boldsymbol{P}|$$

$$\sum F_y = |\boldsymbol{R}_A| + \frac{2}{3}|\boldsymbol{P}| - |\boldsymbol{P}| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{R}_A| = \frac{1}{3}|\boldsymbol{P}|$$

现在以图 5-10 中虚曲线所示截面来截桁架. 需求只有三根内力的杆被该曲面截得（截面不是平面也不影响对问题的求解）. 位于截面上方的桁架的隔离体图如图 5-11 所示. 由平衡条件，可列方程：

$$\sum F_x = -|\boldsymbol{EF}| = 0 \quad \text{或} \quad |\boldsymbol{EF}| = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_B = |\boldsymbol{P}|\left(\frac{2}{3}L\right) + |\boldsymbol{CD}|(L) = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{CD}| = -\frac{2}{3}|\boldsymbol{P}|\text{(C)}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = -|\boldsymbol{P}|\left(\frac{1}{3}L\right)+|\boldsymbol{BA}|(L)=0 \text{ 或 } |\boldsymbol{BA}|=-\frac{1}{3}|\boldsymbol{P}|\ (C)$$

5.4 通讯卫星中继站有一个圆柱形中心舱(置放电子元件),周围有六个等间隔径向平面取向的桁架.每个桁架的结构如图 5-12 所示,并且在发射过程中它承受的力相当于平常重力的 30 倍.这些载荷已标注在图中.求桁架中所有杆的内力.

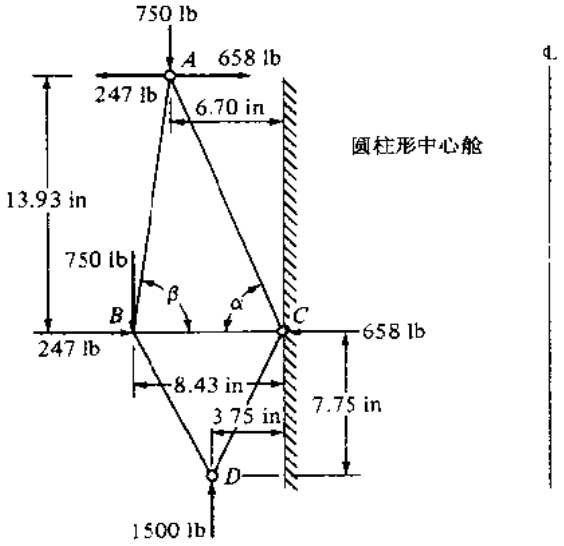


图 5-12

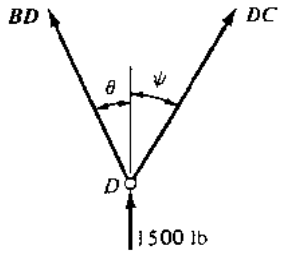


图 5-13

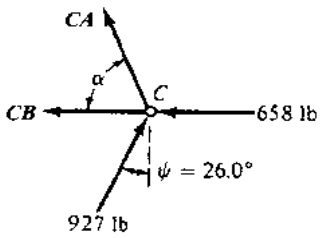


图 5-14

解 我们首先在节点 D 采用节点法.图 5-13 是它的分离体图,图中 $\psi=\arctan(3.75/7.75)=26.0°$,$\theta=\arctan(4.68/7.75)=31.2°$.由平衡条件,有

$$\sum F_x = |\boldsymbol{DC}|\sin\psi - |\boldsymbol{DB}|\sin\theta = 0, \text{或 } 0.438|\boldsymbol{DC}| = 0.520|\boldsymbol{DB}|$$

和

$$\sum F_y = |\boldsymbol{DC}|\cos\psi + |\boldsymbol{DB}|\cos\theta + 1500 = 0$$

从上面两式可解得 $|\boldsymbol{DB}|=-762$ lb(C)和 $|\boldsymbol{DC}|=-927$ lb(C).

接着分析节点 C.其分离体图如图 5-14 所示,图中 $\alpha=\arctan(13.93/6.70)=64.3°$.于是

$$\sum F_y = 927\cos 26.0° + |\boldsymbol{CA}|\sin 64.3° - 0, \text{或}$$

$$|\boldsymbol{CA}| = -925 \text{ lb(C)}$$

$$\sum F_x = -|\boldsymbol{CB}| - 658 + 927\sin 26.0° - |\boldsymbol{CA}|\cos 64.3° = 0$$

所以 $|\boldsymbol{CB}|=149$ lb(T).

最后,欲求杆内力 $\boldsymbol{AB}$,可分析节点 A.其分离体图如图 5-15 所示,平衡方程为

$$\sum F_y = -750 + 925\sin 64.3° - |\boldsymbol{AB}|\sin\beta = 0$$

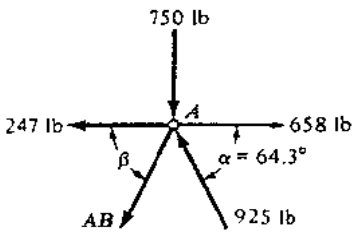


图 5-15

因为 $\beta=\arctan(13.93/1.73)$，故解得 $|\boldsymbol{AB}|=84$ lb(T).

5.5　图 5-16 中，一空间桁架 $ABCD$ 用于一个通讯卫星模型的地面测试. 三根斜撑杆(长皆为 L)的下端 A、B 和 C 都落在水平面(xz 平面)内，而杆 AB、AC 和 BC 构成一等边三角形. A、B 和 C 处的球铰将模型的重量 W 传到 xz 平面. 模型中心垂线恰在三角形 ABC 中心的上方，且水平面是光滑的. 求每根水平杆中的力.

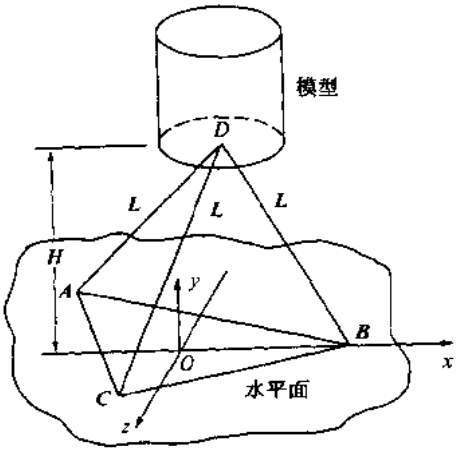


图 5-16

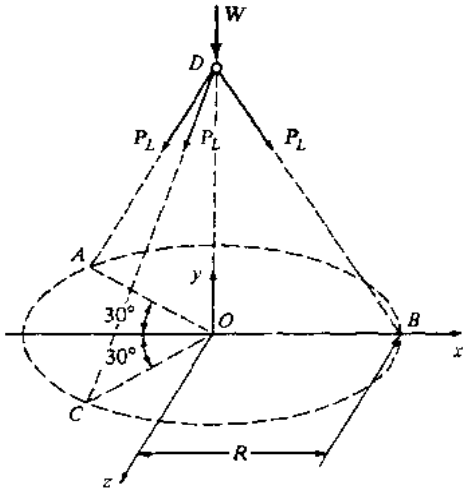


图 5-17

解　从结构的对称性可清楚地看出，三根斜撑杆中轴向力的大小应是相等的，我们记为 P_L. 若在 D 点下方某处用一水平面来截这些杆件，我们可得节点 D 的分离体图(图 5-17). 求 y 方向上各力之和，得

$$\sum F_y = -W - 3P_L \frac{H}{\sqrt{H^2+R^2}} = 0$$

式中利用了关系式 $L^2=H^2+R^2$. 解之，得

$$P_L = \frac{-W\sqrt{H^2+R^2}}{3H}$$

接下来分析节点 B，该节点承受(1)杆 DB 传来的力 P_L，(2)杆 AB 和 BC 中未知的力，以及(3)光滑平面 xz 的法向约束反力. 由于 AB 和 BC 两杆对 x 轴的对称性，故两杆中的力大小应相等，记为 P. 节点 B 的分离体图如图 5-18 所示. 由节点 D 的平衡，有

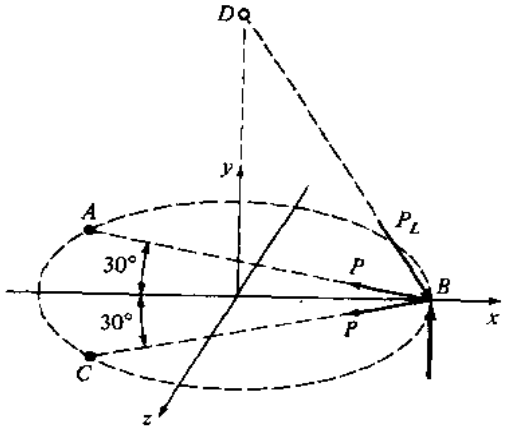


图 5-18

$$\sum F_x = P_L \frac{R}{\sqrt{R^2+H^2}} - 2P\cos 30^\circ = 0 \text{ 或 } F = \frac{WR\sqrt{3}}{9H}$$

5.6 分析一座圆柱销钉连结的桁架，所有的载荷和约束反力都只作用在销钉（节点）上．编制一 FORTRAN 程序求解杆力和约束反力．

最有效的解法是编制这样一个程序，它在每个节点上（基于例题 5.1 中所采用的节点法）建立两个平衡方程，然后解所列出的联立线性代数方程，求得杆力和约束反力的分量．①这个程序在后面给出．该程序也是自动提示的，即终端会显示有关几何参数和载荷的问题，使用者要做的只是输入适当的数据回答这些问题．

桁架分析程序使用步骤如下：

1．统计桁架的节点数，将此数乘以 2，得到该系统联立平衡方程的数目．将此数据输入以回答程序 00014 行的提示．

2．确定每根杆的序号，如例题 5.7 中套圈的数字所示，以便从序号 1 开始运算．各杆序号的先后顺序对运算没影响．输入最大的序号以回答程序 00016 行的提示．

3．在每个节点上引入两个编了序号的矢量．其中一个应水平向右，另一个垂直向上（如图 5-20 中 1,2,…,11,12 所示）．从一个节点到另一个节点，矢量编号的顺序对运算没影响．

4．输入作用在上一步引入的每个节点矢量方向的载荷值（约束反力除外），以回答程序 00018 行的提示．因为有一个专门的子程序用来解联立线性代数方程（00042 行），故必须将向下和向左作用的载荷标成正值，与通常的标注习惯恰好相反．

5．输入每个矢量尾点的坐标以回答程序 00023 行的提示．注意，水平方向的矢量，如图 5-20 中 3 号矢量，只需标注其横坐标；而垂直方向的矢量，如 4 号矢量，只需标注其纵坐标（总是尾点的坐标）．

6．为了标注杆件是与哪一个节点连结，对应于每一根杆，输入 4 个矢量序号（中间用逗号隔开），这就回答了 00029 行的提示．每个节点上的矢量序号输入顺序为先水平矢量后垂直矢量．所以，例题 5.7 中①号杆的标注只能是 1,2,3,4 或 3,4,1,2．

7．接下来程序本身会对约束反力作出反应．在输入了杆件的数目（00016 行）和联立方程的数目（00014 行）后，程序会接在杆件编号后面给约束反力编号，直到号码与联立方程的数目相同为止．使用者须确定每个支撑点上约束的类型，并输入先前编好的矢量编号，以确定在该支撑点上究竟是圆柱铰链约束（有水平和垂直两个分力）还是滚动圆柱约束（仅有垂直分力）．例如，在例题 5.7 中，对桁架左边的圆柱铰链约束，我们应输入矢量编号 1 和 2，告诉计算机该支撑点上的约束反力具有 x 和 y 方向上的两个分量（圆柱铰链）．对右边的滚动圆柱约束，只有矢量编号 10 被输入．约束反力编号输入的先后顺序对运算没影响．

8．各项数据输入之后，计算机会立即输出所有杆力和约束反力的值，杆力正值为拉力；杆力负值为压力．

程序如下：

```
00008C  * * * *          A = COEFFICIENT MATRIX (N * N)          * * * *
00009C  * * * *          P = KNOWN LOAD MATRIX  (N * 1)          * * * *
00010C  * * * *          C = COORDINATE MATRIX  (N)               * * * *
00011C  * * * *                                                  * * * *
00012 PROGRAM TRUSS(INPUT,OUTPUT)
00013 DIMENSION A(50,50),P(50,1),C(50)
```

① 本书采用的程序是基于 A. Chajes 在"结构分析"(Structural Analysis) 一书(Englewood Cliffs, N. J.: Prentice-Hall, 1983)中编制的程序．

```
00014 PRINT * ,'ENTER THE NUMBER OF STMULTANEOUS EQUATIONS;'
00015 READ * ,N
00016 PRINT * ,'ENTER THE NUMBER OF MEMBERS:'
00017 READ * ,NM
00018 PRINT * ,'ENTER THE VALUES OF APPLIED LOAD:'
00019 DO 10 I = 1,N
00020    PRINT * ,'JOINT',I,':'
00021    READ * ,P(I,1)
00022 10 CONTINUE
00023 PRINT * ,'ENTER THE COORDINATES OF THE TAIL OF EACH VECTOR
00024 DO 20 I = 1,N
00025    PRINT * ,'JOINT',I,':'
00026    READ * ,C(I)
00027 20 CONTINUE
00028 DO 30 M = 1,NM
00029    PRINT * ,'ENTER THE VECTOR NUMBERS I,J,K,L FOR MEMBER',M
00030    READ * ,I,J,K,L
00031    ALENGTH = SQRT(((C(K) - C(I)) * * 2) + ((C(L) - C(J)) * * 2))
00032    A(I,M) = (C(K) - C(I))/ALENGTH
00033    A(J,M) = (C(L) - C(J))/ALENGTH
00034    A(K,M) = - (C(K) - C(I))/ALENGTH
00035    A(L,M) = - (C(L) - C(J))/ALENGTH
00036 30 CONTINUE
00037 DO 40 M = (NM+1), N
00038    PRINT * ,'ENTER THE VECTOR NUMBER FOR REACTION',M
00039    READ * , I
00040    A(I,M) = 1.0
00041 40 CONTINUE
00042 CALL MATINV(A,N,P,1,DET,50)
00043 PRINT * ,'SOLUTION:'
00044 PRINT * ,'* * * * * * * * * *'
00045 DO 50 I = 1,NM
00046    PRINT 70,'MEMBER',I,P(I,1)
00047 50 CONTINUE
00048 DO 60 I = (NM + 1),N
00049    PRINT 70,'REACTION',I,P(I,1)
00050 60 CONTINUE
00051 70 FORMAT (A,1X,I2,F 8.2)
00052 END

READY.
```

5.7　图 5-19 中的桁架承受三个图示的垂直力作用.利用例题 5.6 中编制的计算机程序,求所有杆的内力以及约束反力.

解　☞ 该桁架有 6 个节点,所以对例题 5.6 的程序使用步骤 1 来说,先可确定有 12 个联立方程.对步骤 2 和 3 来说,引入杆的序号和矢量序号如图 5-20 所示.其余的步骤在下面的输出中写得很明白.

```
    ENTER THE NUMBER OF SIMULTANEOUS EQUATIONS:
?   12
    ENTER THE NUMBER OF MEMBERS:
```

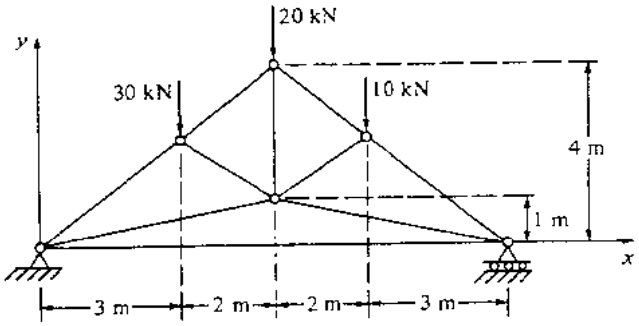


图 5-19

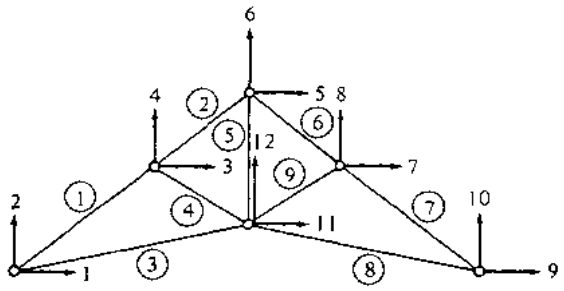


图 5-20

```
?  9
   ENTER THE VALUES OF APPLIED LOAD:
   JOINT1:
?  0
   JOINT2:
?  0
   JOINT3:
?  0
   JOINT4:
?  30
   JOINT5:
?  0
   JOINT6:
?  20
   JOINT7:
?  0
   JOINT8:
?  10
   JOINT9:
?  0
   JOINT10:
?  0
   JOINT11:
   JOINT12:
?  0
   ENTER THE COORDINATES OF THE TAIL OF EACH VECTOR
```

```
    JOINT1:
?   0
    JOINT2:
?   0
    JOINT3:
?   3
    JOINT4:
?   2.4
    JOINT5:
?   5
    JOINT6:
?   4
    JOINT7:
?   7
    JOINT8:
?   2.4
    JOINT9:
?   10
    JOINT10:
?   0
    JOINT11:
?   5
    JOINT12:
?   1
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 1
?   1,2,3,4
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 2
?   3,4,5,6
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 3
?   1,2,11,12
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 4
?   3,4,11,12
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 5
?   11,12,5,6
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 6
?   5,6,7,8
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 7
?   7,8,9,10
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 8
?   11,12,9,10
    ENTER THE VECTOR NUMBERS I, J, K, L FOR MEMBER 9
?   11,12,7,8
    ENTER THE VECTOR NUMBER FOR REACTION10
?   1
    ENTER THE VECTOR NUMBER FOR REACTION11
?   2
    ENTER THE VECTOR NUMBER FOR REACTION12
?   10
    SOLUTION:
```

```
* * * * * * * * *
MEMBER  1   -72.57
MEMBER  2   -46.96
MEMBER  3    57.79
MEMBER  4   -24.41
MEMBER  5    38.67
MEMBER  6   -46.96
MEMBER  7   -55.49
MEMBER  8    44.19
MEMBER  9    -8.14
REACTION 10    .00
REACTION 11  34.00
REACTION 12  26.00
```

补 充 习 题

5.8 图 5-21 中的桁架在 F 点由圆柱铰链约束，在 A 处由滚动圆柱支撑，所以 A 处的约束反力与 45°斜面相垂直.求杆 AF、AB 和 BE 中的力.

答案：$|\boldsymbol{AF}| = -14.99\text{kN(C)}$；$|\boldsymbol{AB}| = -14.99\text{kN(C)}$；$|\boldsymbol{BE}| = -10\text{kN(C)}$

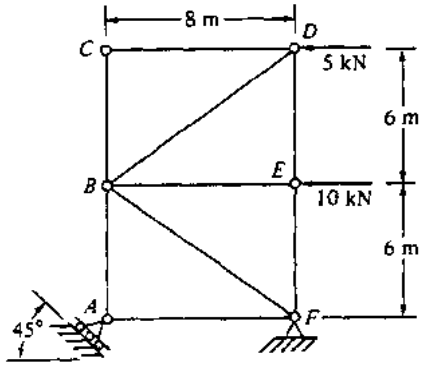


图 5-21

5.9 图 5-22 中的桁架承受 7 个垂直载荷的作用，求杆 DE、EK 和 KJ 中的力.

答案：$|\boldsymbol{DE}| = -8|\boldsymbol{P}|\text{(C)}$；$|\boldsymbol{EK}| = -2|\boldsymbol{P}|/\sqrt{2}$ (C)；$|\boldsymbol{KJ}| = 9|\boldsymbol{P}|\text{(T)}$

5.10 对图 5-16 和图 5-17 中的空间桁架和卫星模型来说，设模型承受一平行于 x 轴的水平力 $\boldsymbol{F}$ 的作用.求仅由力 $\boldsymbol{F}$ 引起的杆 AB 和 BC 的内力，即重量 W 不计.设相对于桁架来说，卫星很小，所以力 $\boldsymbol{F}$ 可以认为是作用在桁架顶点 D 上.

答案：$2|\boldsymbol{F}|\sqrt{3}/3$

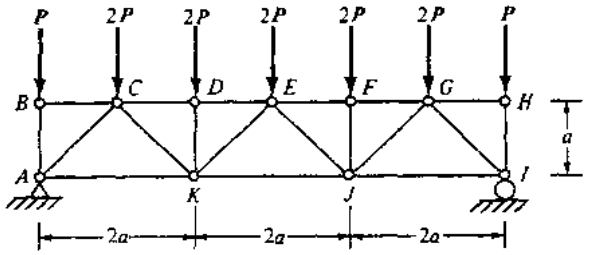


图 5-22

5.11 图 5-23 中的桁架承受三个图示垂直载荷的作用.利用例题 5.6 的计算机程序，求图上编了号各杆的内力及约束反力.

答案：①−4679.25；②−3169.82；③−2912.00；④2688.00；⑤800.00；⑥−1509.44；⑦0；⑧3968.00；⑨3968.00；reaction10，0；reaction11，3480.00；reaction12，1120.00

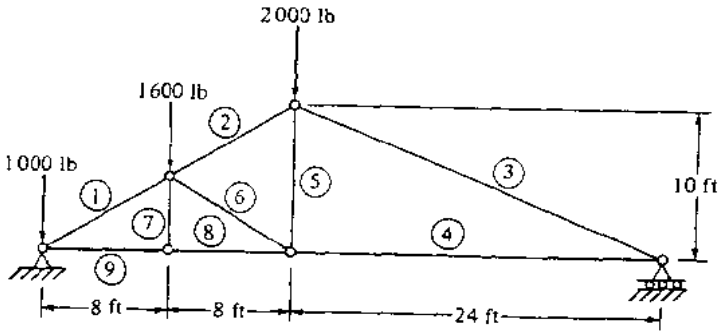


图 5-23

第六章　形心，惯性矩和分布载荷

形心和第一类矩

图 6-1(a)、(b)和(c)中分别是有限尺度的线、面和体. 每一个图形的形心坐标由下面的公式定义：

$$\bar{x} = \frac{\int x\mathrm{d}L}{L} \quad \bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}L}{L} \quad \text{对长为 } L \text{ 的线}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\mathrm{d}A}{A} \quad \bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}A}{A} \quad \text{对面积为 } A \text{ 的面}$$

$$\bar{x} = \frac{\int x\mathrm{d}V}{V} \quad \bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}V}{V} \quad \bar{z} = \frac{\int z\mathrm{d}V}{V} \quad \text{对体积为 } V \text{ 的体}$$

在每一个定义式中，等号右边的分子称为(线、面或体)相对某一轴的第一类矩. 若有限尺度的线、面或体是由一些几何形状简单的组分，诸如线段、弧和三角形组成的，则上面公式中的积分可用有限的求和来代替. (见例题 6.1 至 6.8)



图 6-1

物体的重心是这样一个点，不论物体的位置如何变化，其重量可以认为都集中在该点上. 对于一个单位体积重量均匀的物体，其重心与形心重合.

面积的第二类矩或惯性矩

与上述平面的第一类矩定义相仿，一平面对 x 和 y 轴的第二类矩或惯性矩分别定义为

$$I_x = \int y^2\mathrm{d}A \qquad I_y = \int x^2\mathrm{d}A$$

惯性矩的单位是长度的 4 次方. (见例题 6.9 至 6.12)

面积惯性矩的平行轴定理

考虑图 6-2 中的平面 A. 在形心 G 的坐标确定之后，通过 G 点引两根分别与 x 和 y 轴平行的轴 x_G 和 y_G. 于是，面积 A 对 x 和 y 轴的惯性矩 I_x 和 I_y，与对 x_G 和 y_G 轴的惯性矩 I_{x_G} 和 I_{y_G} 的关系为

$$I_x = I_{x_G} + A(y_1)^2 \text{ 和 } I_y = I_{y_G} + A(x_1)^2$$

(见例题 6.10 至 6.12)

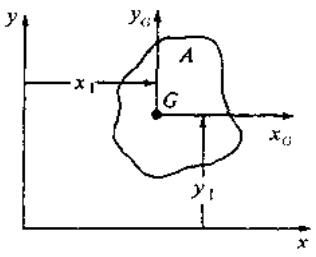


图 6-2

回转半径

面积 A 对于 x 轴和 y 轴的回转半径定义为

$$r_x=\sqrt{\frac{I_x}{A}}\quad 和\quad r_y=\sqrt{\frac{I_y}{A}}$$

分布载荷

分布载荷的常例一是作用在图 6-3(a)中梁上的均布载荷，另一个是作用在图 6-3(b)中堤坝上流体压力的非均布载荷．图 6-3(b)中，在水面下距离为 y 处，流体对堤坝上每单位面积施加一法向(水平方向)力 p(称为压强)，$p=\gamma y$，其中 γ 是流体的比重，即单位体积的重量、流体对坝施加的总作用力为堤坝浸没于流体的高度 D 上的平均压强乘以压强作用的面积．流体作用力的合力通过图 6-3(b)中压强分布三角形的形心，即液面下 $2D/3$ 处．

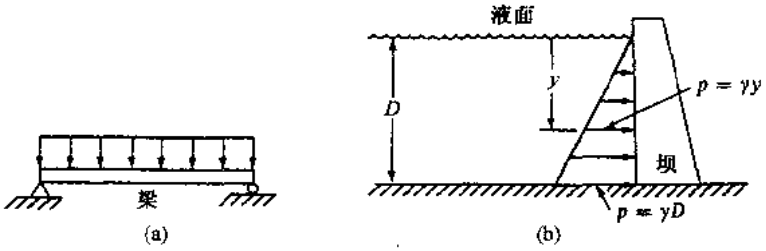


图 6-3

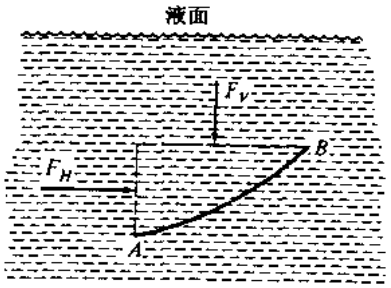


图 6-4

对图 6-4 中浸没在流体中的曲面 AB，作用其上的流体压力可分解成两部分：(1)水平分量 F_H，该力等于作用于曲面 AB 垂直投影面形心上的压强乘以垂直投影面的面积；(2)垂直分量 F_V，该力等于位于曲面垂直上方流体的重量．(见例题 6.21)

例　题

6.1　一根在三维空间中的细丝由三段组成：一段为四分之一的圆弧 AB，还有两段直线段 BC 和 CD，分别平行于 z 轴和 x 轴，如图 6-5 所示，求这根细丝的形心位置．

解　所有这三段细丝的形心位置都已知或容易求得，所以我们利用求和法．对 $\bar{x}$，有

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{3}\bar{x}_i(\Delta L)_i}{\sum_{i=1}^{3}(\Delta L)_i}$$

式中 $\bar{x}_i$ 表示各段的形心到 yz 平面的距离，$(\Delta L)_i$ 表示每一段的长度，我们考虑各段的顺序依次为 AB、BC 和 CD．于是有

$$\bar{x} = \frac{\frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R}{2} + R(R\sqrt{2}) + \frac{5}{8}R\left(\frac{3}{4}R\right)}{\frac{\pi R}{2} - R\sqrt{2} + \frac{3}{4}R} = 0.683R$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\bar{y}_i(\Delta L)_i}{\sum_{i=1}^{3}(\Delta L)_i} = \frac{\frac{4R}{3\pi}\frac{\pi R}{2} + 0 + 0}{\frac{\pi R}{2} + R\sqrt{2} + \frac{3}{4}R} = 0.179R$$

和

$$\bar{z} = \frac{\sum_{i=1}^{3}\bar{z}_i(\Delta L)_i}{\sum_{i=1}^{3}(\Delta L)_i} = \frac{0 + \frac{R\sqrt{2}}{2}R\sqrt{2} + R\sqrt{2}\left(\frac{3}{4}R\right)}{\frac{\pi R}{2} + R\sqrt{2} + \frac{3}{4}R} = 0.552R$$

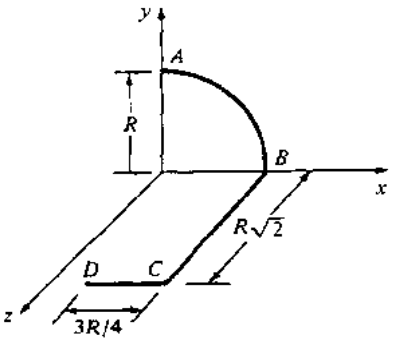


图 6-5

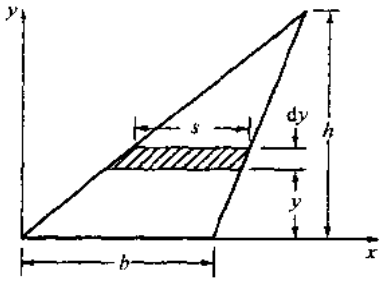


图 6-6

6.2　求一个三角形的形心.

解　☞ 引入图 6-6 所示的坐标系.则形心的 y 坐标为

$$\bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}A}{A}$$

最简单的方法是选择一积分元,其上各点的 y 坐标都一样.图上水平阴影条符合这一要求,且面积元的面积 $\mathrm{d}A$ 为 $s\mathrm{d}y$.于是,

$$\bar{y} = \frac{\int ys\mathrm{d}y}{A}.$$

积 $ys\mathrm{d}y$ 表示带阴影的积分元对 x 轴的第一类矩.

由三角形相似,$s/b = (h-y)/h$.将上面积分式中的 s 和 A 置换掉,得

$$\bar{y} = \frac{\int_0^h y\frac{b}{h}(h-y)\mathrm{d}y}{\frac{1}{2}bh} = \frac{2}{h^2}\int_0^h (hy - y^2)\mathrm{d}y$$

$$= \frac{2}{h^2}\left(h\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^h - \left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h\right) = \frac{2}{h^2}\left(\frac{h^3}{2} - \frac{h^3}{3}\right) = \frac{h}{3}$$

$\bar{x}$ 也可用同样的方法求得.

6.3　求半圆的形心.

解　☞ 对这样形状的面积,选择图 6-7 中的极坐标是合乎逻辑的.图中带阴影的面积元近似是一矩形,其面积为 $\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho$.形心的 y 坐标为

$$\bar{y} = \frac{\int y\mathrm{d}A}{\int \mathrm{d}A} = \frac{\int_0^{\pi}\int_0^r(\rho\sin\theta)(\rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho)}{\int_0^{\pi}\int_0^r \rho\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\rho} = \frac{\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^3}{3}\right]_0^r \sin\theta\mathrm{d}\theta}{\int_0^{\pi}\left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^r \mathrm{d}\theta}$$

$$= \frac{\frac{r^3}{3}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta}{\frac{r^2}{2}\int_0^{\pi}d\theta} = \frac{2r}{3\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi} = \frac{4r}{3\pi}$$

由对称性，$\bar{x}=0$.

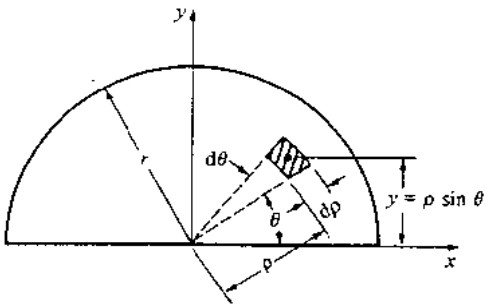


图 6-7

四分之一圆的形心同样可以求得，只要将积分上限 π 换成 $\pi/2$ 即可. 结果是 $\bar{x}=\bar{y}=\frac{4r}{3\pi}$.

6.4　图 6-8 中的面积 OAB 由两根轴和抛物线 $y=H(1-x^2/K^2)$ 作为边界. 求该面积形心的 x 和 y 坐标.

解　由形心的定义，其 y 坐标为

$$\bar{y} = \frac{\int y dA}{A} \tag{1}$$

为求积分值，选择垂直方向细长积分元(图 6-8 中阴影部分)，其高为 y 宽为 dx；这个基本上是矩形的积分元的形心在其高度的中点，即在 x 轴上方 $y/2$ 的地方. 此积分元的第一类矩为 $\left(\frac{y}{2}\right)ydx$. 式(1)中分母的面积 A 只是所有这样矩形积分元的面积之和(积分).

$$\bar{y} = \frac{\int_0^K \frac{y}{2}ydx}{\int_0^K ydx} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^K H^2\left(1-\frac{2x^2}{K^2}+\frac{x^4}{K^4}\right)dx}{\int_0^K H\left(1-\frac{x^2}{K^2}\right)dx} = \frac{2}{5}H$$

形心的 x 坐标为 $\bar{x}=\int xdA/A$. 利用同一矩形面积元，求得

$$\bar{x} = \frac{\int_0^K xydx}{\int_0^K ydx} = \frac{\int_0^K xH\left(1-\frac{x^2}{K^2}\right)dx}{\int_0^K H\left(1-\frac{x^2}{K^2}\right)dx} = \frac{3}{8}K$$

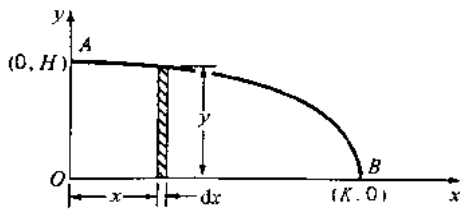


图 6-8

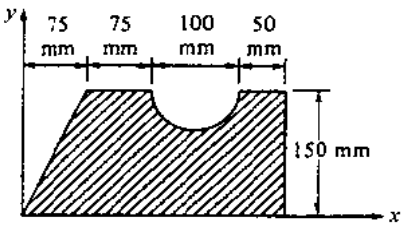


图 6-9

6.5　求图 6-9 中阴影部分面积的形心，该面积是从一块矩形中去掉一角和一半圆后剩余的部分.

解　有阴影的面积是从一长 300mm，高 150mm 的矩形(1)中去掉一块底为 75mm，高 150mm 的三角形(2)和一块半圆(3)余下的. 因为面积(2)和(3)的形心已在例题 6.2 和 6.3 中分别求得，故此题

不必用积分，可以利用有限次数的求和来解.

形心的 y 坐标由式 $\bar{y} = \left(\int y\mathrm{d}A\right)/A$ 确定. 式中分子表示有阴影面积对 x 轴的第一类矩，可通过计算矩形面积的第一类力矩，减去三角形和半圆的第一类矩而求得. 故

$$\bar{y} = \frac{150(300)(75) - \frac{1}{2}(150)(75)(100) \quad \frac{1}{2}\pi(50)^2\left[150 - \frac{4(50)}{3\pi}\right]}{300(150) - \frac{1}{2}(75)(150) - \frac{1}{2}\pi(50)^2} = 65.08\ \text{mm}$$

同样地，形心的 x 坐标由式 $\bar{x} = \left(\int x\mathrm{d}A\right)/A$ 确定. 通过矩形面积对 y 轴的第一类矩减去三角形和半圆对 y 轴的第一类矩即可求得分子的值. 故

$$\bar{x} = \frac{150(300)(150) - \frac{1}{2}(150)(75)(25) - \frac{1}{2}\pi(50)^2(200)}{300(150) - \frac{1}{2}(75)(150) - \frac{1}{2}\pi(50)^2} = 164.3\text{mm}.$$

6.6　求图 6-10 中工字梁的形心.

解　☞ 形心在 y 轴上，其 y 坐标为 $\bar{y} = \left(\int y\mathrm{d}A\right)/A$.

工字梁的截面可分割成 5 个如图所示的矩形分截面，这样，上述表达式的分子可由数次求和解得. 即

$$\bar{y} = \frac{75(50)(300) + 75(50)(300) + 50(325)(325/2) + 50(100)(25) + 50(100)(25)}{75(50) + 75(50) + 50(325) + 100(50) + 100(50)}$$

$$= 152.3\ \text{mm}$$

图中穿过形心的水平轴为 x_G 轴.

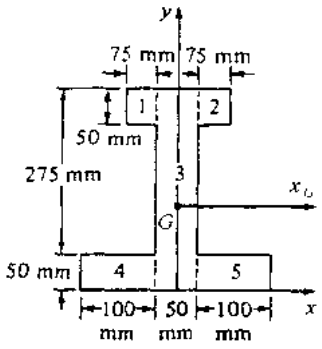


图 6-10

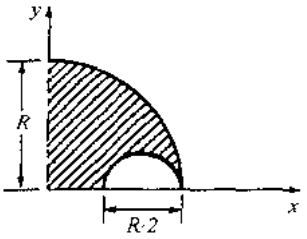


图 6-11

6.7　求图 6-11 中阴影面积形心的 x 坐标，该面积为从四分之一圆中去掉一较小的半圆后剩余的部分.

解　☞ 有阴影面积形心的 x 坐标由式 $\sum_{i=1}^{2}\bar{x}_i(\Delta A)_i \Big/ \sum_{i=1}^{2}(\Delta A)_i$ 确定.

四分之一圆的形心已在例题 6.3 中求得. 半圆形心的 x 坐标在它的垂直对称轴上，即距 y 轴 $3R/4$ 的地方. 于是，有

$$\bar{x} = \frac{\frac{4R}{3\pi}\cdot\frac{\pi}{4}R^2 - \left(R - \frac{R}{4}\right)\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{R}{2}\right)^2}{\frac{\pi}{4}R^2 - \frac{\pi}{2}\left(\frac{R}{2}\right)^2} = 0.099R$$

6.8　图 6-12 中的实心体包括以下几部分：(1)大长方体，(2)一个在大长方体顶上的小长方体，(3)在大长方体右端的三角形楔块，(4)一个直径 1 in 钻透大长方体的圆孔，(5)一个粘结在实心体正面的实心圆盘. 盘和孔的圆心都在大长方体高的一面上，距 xz 平面 2.5 in，如图所示. 求该实心体形心的 x 坐标，给定的尺寸如图所标.

解　☞ 形心的 x 坐标由下式确定，

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} \bar{x}_i (\Delta V)_i}{\sum_{i=1}^{5} (\Delta V)_i}$$

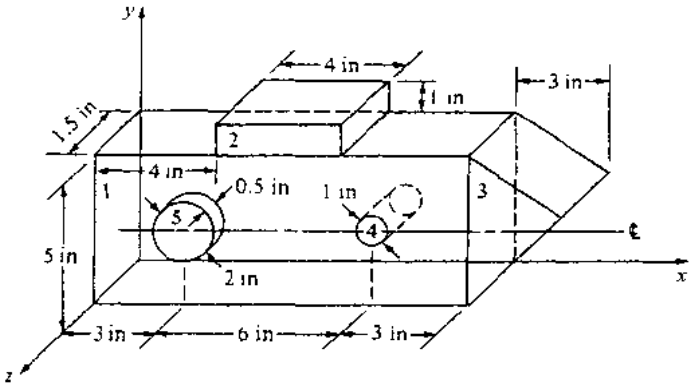


图 6-12

两个求和运算最好用列表方式进行：

体积	$\bar{x}_i$(in)	$(\Delta V)_i$,(in^3)	$\bar{x}_i(\Delta V)_i$(in^4)
1	6	$12(1.5)(5)=90$	540
2	6	$4(1)(1.5)=6$	36
3	13	$\frac{1}{2}(5)(3)(1.5)=11.25$	146.3
4	9	$-\pi(0.5)^2(1.5)=-1.178$	-10.6
5	3	$\pi(1)^2(0.5)=1.57$	4.71
合计		107.6	716.4

所以 $\bar{x}=716.4/107.6=6.66$.

6.9　求矩形相对与其底边重合的轴的惯性积.

解　建立如图 6-13 所示的坐标系.因为带阴影的积分元上所有点的 y 坐标为常数,故有

$$I_x = \int y^2 dA = \int_0^h y^2 b dy = b\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{1}{3}bh^3$$

6.10　求图 6-14 中槽形截面相对通过其形心的水平轴的惯性矩和回转半径.

解　形心在 y 轴上,其 y 坐标由式 $\bar{y} = \left(\int y dA\right)/A$ 确定.

将截面分成几个小矩形,用求和法求 $\bar{y}$ 的值：

$$\bar{y} = \frac{1(5)(2.5)+10(1)(0.5)+1(5)(2.5)}{1(5)+10(1)+1(5)} = 1.5 \text{ in}$$

图中通过形心的水平轴标为 x_G.

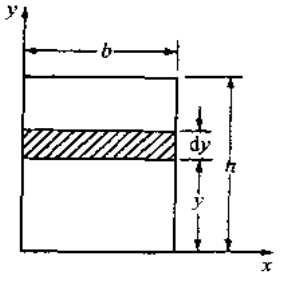


图 6-13

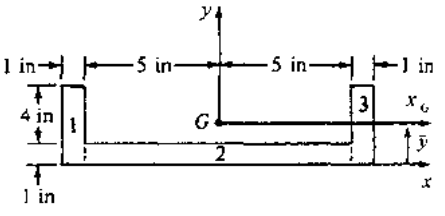


图 6-14

比较方便的解法是先求对于 x 轴的惯性矩，再利用平行轴定理．对于每个小矩形(共 3 个)，相对通过其底边的轴的惯性矩已在例题 6.9 中求得为 $I_x = bh^3/3$．对整个图形，则

$$I_x = \frac{1}{3}(1)(5)^3 + \frac{1}{3}(10)(1)^3 + \frac{1}{3}(1)(5)^3 = 86.6\ \text{in}^4$$

根据平行轴定理，$I_x = I_{x_G} + Ay_1^2$．故

$$86.6 = I_{x_G} + 20(1.5)^2, \quad \text{或} \quad I_{x_G} = 41.6\ \text{in}^4$$

相对于 x_G 轴的回转半径为 $r_{x_G} = \sqrt{I_{x_G}/A} = \sqrt{41.6/20} = 1.45$ in

6.11　求图 6-15 中工字梁截面相对通过其形心的水平轴的惯性矩和回转半径．

解　形心在 y 轴上，在例题 6.6 中已求得 $y = 152.3$mm．图中通过形心的水平轴标为 x_G．

先求相对于 x 轴的第二类面积矩．对分截面 3、4 和 5，相对 x 轴的第二类矩为 $I_x = bh^3/3$．对分截面 1 和 2，首先须求出其相对通过它们各自形心的水平轴 x_1 的第二类矩 $I_{x_1} = bh^3/12$，然后再利用平行轴定理转换成对 x 轴的第二类矩．

对整个图形，则

$$\begin{aligned} I_x &= \frac{1}{3}(100)(50)^3 + \frac{1}{3}(100)(50)^3 + \frac{1}{3}(50)(325)^3 \\ &\quad + \left[\frac{1}{12}(75)(50)^3 + 75(50)(300)^2\right]2 \\ &= 12.6 \times 10^8 \text{mm}^4 \end{aligned}$$

由平行轴定理，$I_x = I_{x_G} + Ay_1^2$，故

$$12.6 \times 10^8 = I_{x_G} + 33.75 \times 10^3 (152.3)^2, \text{或} \quad I_{x_G} = 4.8 \times 10^8\ \text{mm}^4$$

相对 x_G 轴的回转半径为 $r_{x_G} = \sqrt{I_{x_G}/A} = \sqrt{(4.8 \times 10^8)/(33.75 \times 10^3)} = 119.3$mm．

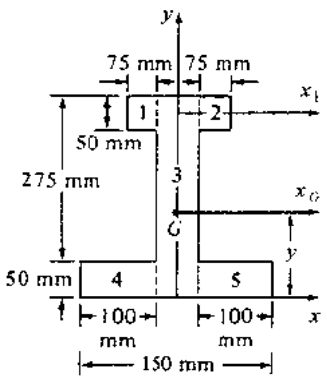


图 6-15

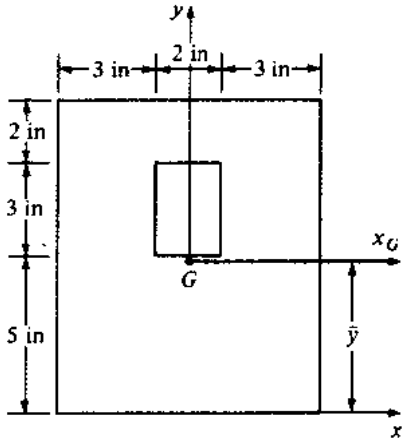


图 6-16

6.12　求图 6-16 的中空矩形面积相对通过其形心的水平轴的惯性矩．

解　形心在 y 轴上，其坐标由式 $\bar{y} = \left(\int y\mathrm{d}A\right)/A$ 确定．上式分子的值可将大矩形相对 x 轴的第一类矩减去小矩形的第一类矩求得．故

$$\bar{y} = \frac{8(10)(5) - 2(3)(6.5)}{8(10) - 2(3)} = 4.88\text{in}$$

图中通过形心的平行轴标为 x_G．

先算大矩形相对 x_G 轴的惯性矩．我们可以先假设 2in×3in 的孔不存在，计算它对通过其形心的水平轴的惯性矩，然后再转换成对 x_G 轴的．对于完整的矩形运用平行轴定理，则

$$I'_{x_G} = \frac{1}{12}(8)(10)^3 + 8(10)(5 - 4.88)^2 = 668\text{in}^4$$

同样地，对被去掉的小矩形，它相对于 x_G 轴的惯性矩，也可以先计算它对于通过自身形心的水平轴的惯性矩，再转换成对 x_G 轴的从而求得．所以

$$I''_{x_C} = \frac{1}{12}(2)(3)^3 + 2(3)(6.5 - 4.88)^2 = 20.3\text{in}^4$$

于是，中空矩形面积的惯性矩为

$$I_{x_C} = I'_{x_C} - I''_{x_C} = 668 - 20.3 = 647.7\text{in}^4$$

6.13 加利福尼亚的喷气动力实验室设计了一台很轻的车辆在离地面数百公里的地方携带仪器设备。它罩有一层边长为 800m 的正方形薄膜来吸收太阳辐射。在预计的高度上，太阳辐射的压强为 4.66N/km^2。这一压力认为可以在上层大气中缓慢推动车辆，因为那里实际上不存在阻抗太阳辐射压力的大气压力。在假设太阳辐射压力是垂直作用到帆上的条件下，求帆上的压力。

解 垂直作用到帆上的压力等于压强（单位面积上的力）乘以帆的面积。所以，

$$F = (4.66\text{N/km}^2)(0.8\text{km})(0.8\text{km}) = 2.98\text{N}.$$

6.14 气垫船是一种每天运送旅客穿越英吉利海峡的气垫式运输工具。在操作时，大量的空气源源不断地向下进入一充气室里。充气室由船底板，以及围在船底四周高强度、柔软的裙边构成，如图 6-17 所示。由于空气压力，它形成一个“垫子”托住运输工具。船大致呈 77ft 长和 45ft 宽的矩形。船体、旅客和燃料总重为 96 000lb。求托住运输工具所需的充气室中的压强。设在船底的矩形面积上压力均匀分布。

解 空气所要托起的作用在 77ft×45ft 矩形面积上的重量为 96 000lb。所以，压强（单位面积上的压力）为

$$P = \frac{96\,000\text{ lb}}{(77\text{ ft})(45\text{ ft})} = 27.71\text{ lb/ft}^2 \text{ 或 } 0.192\text{ lb/in}^2.$$

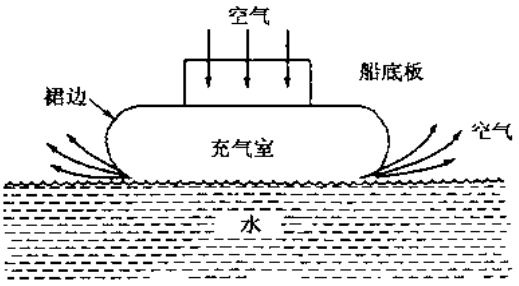


图 6-17

6.15 图 6-18 中的简支梁受两个呈线性变化的分布载荷作用。求梁两端的约束反力。

解 分布载荷的合力如图 6-18 中虚线矢量所示。其大小为三角形载荷图形的面积：对梁的 AB 段，有

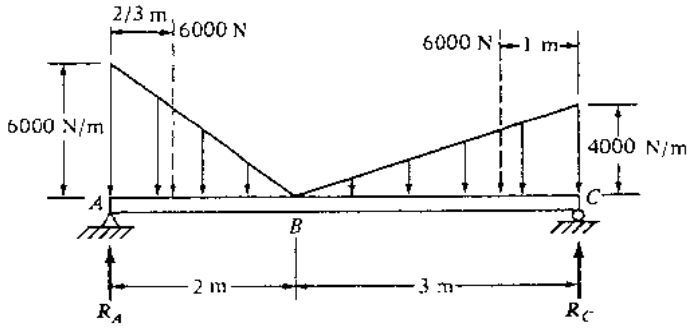


图 6-18

$$\frac{1}{2}(2\text{m})(6000\text{N/m}) = 6000\text{N}$$

对梁上 BC 段，有

$$\frac{1}{2}(3\text{m})(4000\text{N/m}) = 6000\text{N}$$

每个合力的作用线均通过各自载荷分布图形的形心，如图所示.

现在，用这两个合力代替分布载荷，可写两个平衡方程：

$$+\circlearrowleft \sum M_A = \frac{2}{3}(6000) + 4(6000) - 5\,|\boldsymbol{R}_C| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{R}_C| = 5600\text{N}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_C = -1(6000) - 4\frac{1}{3}(6000) + 5\,|\boldsymbol{R}_A| = 0 \text{ 或 } |\boldsymbol{R}_A| = 6400\text{N}$$

6.16　一块刚性板放在松软的路基上，板上有一巨大的冲压机. 机器和板总重为 300 000 lb，路基上有一段开始失去支撑强度，结果使板倾斜了 10°角，如图 6-19 所示. 路基不能承受张力，所以冲压机的重量必由法向压力与剪切反作用力构成的三角形分布载荷来平衡. 求：在板的右端所形成的法向压力 W_0 的最大值. 设板和冲压机在垂直纸面方向上均为单位长度深.

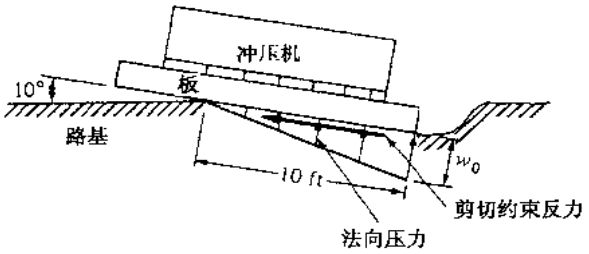


图 6-19

解　☞ 300 000 lb 的垂直载荷只能由法向分布压力的合力 **N** 和沿板的底面向左作用的剪切力 $\boldsymbol{F}_s$ 合起来平衡掉.

这三个力的力三角形如图 6-20 所示. 该图告诉我们，合力 **N** 的大小为 300 000cos10° = 295 400lb. 因为此力必等于载荷分布图形的面积，故在板为单位深度的条件下，有

$$\frac{1}{2}(10)(W_0) = 295\,400 \quad \text{或} \quad W_0 = 59\,100\text{lb/ft}$$

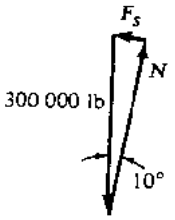


图 6-20

6.17　由于风力而作用在飞机螺旋桨轴向的载荷，近似地呈抛物线分布，如图 6-21 所示. 求使螺旋桨匀角速旋转所需的扭矩.

解　☞ 首先要确定分布载荷的合力及其作用线的位置. 对每个半支螺旋桨来说，合力的大小由载荷分布图形的面积确定，即将图 6-22 中的面积元 $p\,\mathrm{d}x$ 在半支螺旋桨的区域内积分. 对右半支桨，有

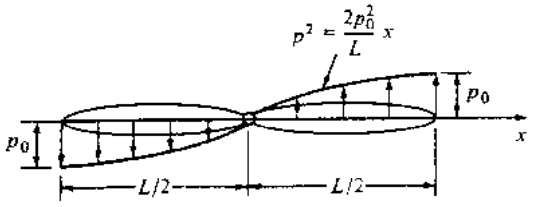


图 6-21

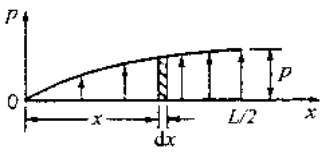


图 6-22

$$\int p\,\mathrm{d}x = \int_0^{L/2} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}} p_0 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{2}{L}} p_0 \left[\frac{x^{3/2}}{3/2}\right]_0^{L/2} = \frac{p_0 L}{3}$$

该合力的作用线通过右半支桨上载荷分布图形的形心，设形心与螺旋桨转轴的距离为 $\bar{x}$，则

$$\bar{x}=\frac{\int xp\mathrm{d}x}{\int p\mathrm{d}x}=\frac{\int_0^{L/2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}p_C x^{3/2}\mathrm{d}x}{\int_0^{L/2}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{L}}p_C x^{1/2}\mathrm{d}x}=\frac{3}{10}L$$

对左半支螺旋桨，载荷的合力及其位置可由对称性而得知. 两半支合在一起，如图6-23所示，图中 T_0 是驱动螺旋桨所需扭矩. 由对螺旋桨转轴力矩的平衡，可得

$$T_0=2\frac{3L}{10}\frac{p_0L}{3}=\frac{p_0L^2}{5}$$

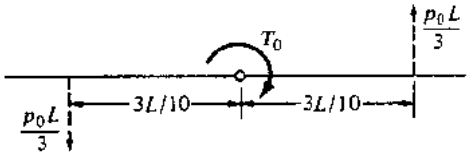


图 6-23

6.18　一个具有正圆柱壳形状的烟囱会受到水平风力的作用. 试验结果表明，风力在迎风的一侧产生正压而在背风的一侧产生吸力(负压). 同时也知道压力沿烟囱的高度呈线性变化，故在距地面高度为 z 且与风向偏离 θ 角的地方，压强为

$$p=p_0(\cos\theta)\left(1+\frac{z}{H}\right)$$

(见图 6-24). 求风作用在烟囱上的合力.

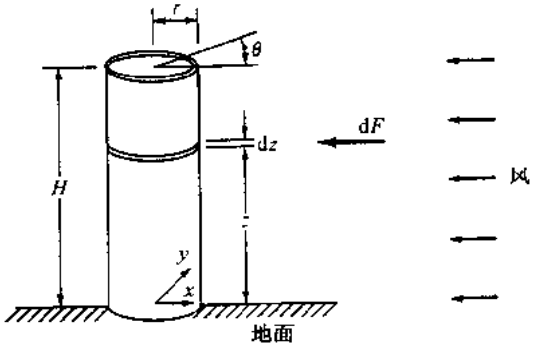


图 6-24

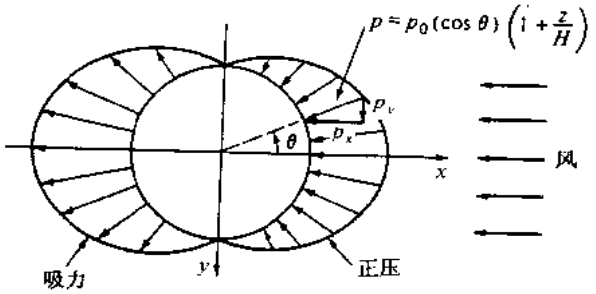


图 6-25

解　烟囱周围的压力分布如图 6-25 所示；图中 p 始终是垂直于烟囱表面. 在每一个由 θ 角表示的点上，有一个沿 y 轴方向作用的压力分量 p_y，就有一个作用在 $-\theta$ 角点的反向压力分量 $-p_y$ 与之对应. 这样，所有在 y 方向上的压力分量互相抵消，而风的合力只由在 x 方向上的分量组成. 从所给的压力变化规律可知，在 θ 角处，有

$$p_x=p\cos\theta=p_0(\cos^2\theta)\left(1+\frac{z}{H}\right)$$

设作用于烟囱上距地面高度为 z，高为 $\mathrm{d}z$ 的圆环形微段上的水平风力为 $\mathrm{d}F$(见图 6-24)，压力 p_x 作用在面积元 $r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$ 上，故

$$|d\boldsymbol{F}| = \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} p_0(\cos^2\theta)\left(1+\frac{z}{H}\right)r\,d\theta\,dz = p_0 r\left(1+\frac{z}{H}\right)\pi\,dz$$

要求合力 $\boldsymbol{F}$，只要将上式沿烟囱高度积分，即将所有这样的圆环微段上的风力加起来：

$$|\boldsymbol{F}| = \left|\int d\boldsymbol{F}\right| = \int_0^H p_0 r\left(1+\frac{z}{H}\right)\pi\,dz = \frac{3}{2}p_0\pi rH$$

6.19 建于1350年的意大利比萨斜塔高58.2m，其圆形塔基直径为19.6m．在过去的几个世纪里塔的纵轴从垂直位置向南倾斜了5.6°（图6-26）．塔重144MN．从塔基至塔顶，塔的横截面直径变化很小，故其重心大约在距塔基27.1m的地方．沙土地基作用于刚性圆形基石上的压力可以合理地用下面关系式近似表示：

$$p = A + Br^{0.625}\cos\theta \quad \text{N/m}^2,$$

式中 r 和 θ 是极坐标（θ 角从向南方位起算，如图6-27所示），而 A 和 B 是待定常数．求：塔身作用于塔基的最大压力（出现在南端）和最小压力（出现在北端）．

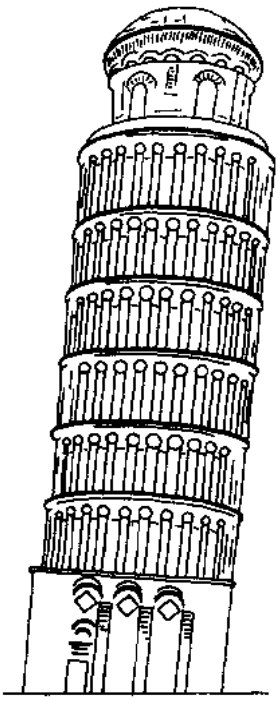


图 6-26

解 图6-28是从西向东看的塔身纵向剖面图．塔的重心偏离垂直位置的水平位移 δ 为

$$\delta = (5.6^\circ)\frac{1\text{rad}}{57.3^\circ}(27.1\text{m}) = 2.65\text{m}$$

重力矢量对图6-27中东西方向轴线之矩的大小为

$$M = (144\text{MN})(2.65\text{m}) = 381.6\text{MN}\cdot\text{m}$$

图6-29中，塔基上有阴影的面积元为 $dA = r\,dr\,d\theta$．地面作用在面积元上的约束反力为 $p\,dA$．为与144MN的塔身重量在垂直方向保持平衡，必须 $\int_{\text{塔基}} p\,dA = 144$．

将 p 用假设的压力分布关系置换，得

$$2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}(A + Br^{0.625}\cos\theta)r\,dr\,d\theta = 144$$

或

$$2A\left[\frac{r^2}{2}\right]_0^R[\theta]_0^\pi + 2B\left[\frac{r^{2.675}}{2.625}\right]_0^R[\sin\theta]_0^\pi = 144$$

解得 $A = 144/\pi R^2$．

由地面约束反力与塔身重量相对东西方向轴线力矩的平衡，有

$$2\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{r=0}^{R}(A + Br^{0.625}\cos\theta)(r\cos\theta)r\,dr\,d\theta = 381.6$$

或

$$2A\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R[\sin\theta]_0^\pi + 2B\left[\frac{r^{3.625}}{3.625}\right]_0^R\frac{\pi}{2} = 381.6$$

解得 $B = (3.625)(381.6)/\pi R^{3.625}$．

于是塔基上的压力分布为

$$p = \frac{144}{\pi R^2} + \frac{(3.625)(381.6)}{\pi R^{3.625}}r^{0.625}\cos\theta \qquad (1)$$

将式(1)中的 r 设为 $r = R = 9.8\text{m}$，θ 设为 $\theta = 0$，可得塔基南端的压力峰值为

$$p_{\max} = \frac{144}{\pi(9.8)^2} + \frac{(3.625)(381.6)}{\pi(9.8)^{3.625}}(9.8)^{0.625}\cos 0^\circ$$
$$= 0.945\text{ MN}$$

将式(1)中的 r 设为 $r = R$，θ 设为 $\theta = \pi$，可得塔基北端压力最小值为

$$p_{\min} = \frac{144}{\pi(9.8)^2} + \frac{(3.625)(381.6)}{\pi(9.8)^{3.625}}(9.8)^{0.625}\cos\pi = 0.009\text{ MN}$$

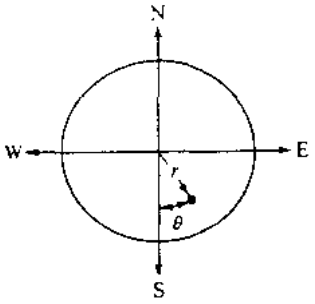


图 6-27

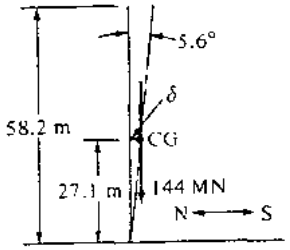


图 6-28

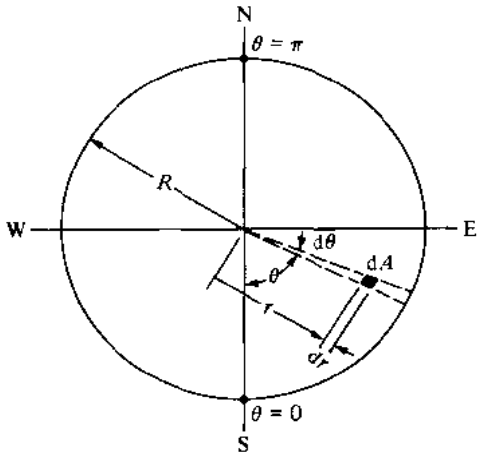


图 6-29

6.20　一个矩形油罐注满了油，在罐的一端开了一扇等腰梯形的门. 梯形的上下底分别为 18ft 和 12ft，高 4ft. 求作用于门上合力的大小和位置. 设油的比重为 56.2 lb/ft^3.

解　引入图 6-30 所示的坐标系，图中门(有阴影线)画成一个三角形的一部分，而三角形的顶点恰在坐标系原点上. 在油面以下任何深为 $12-y$ 的地方，油压为 $p=(56.2(lb/ft^3))[(12-y)ft]$. 故作用于高为 dy 长为 $2x$ 的面积元上的水平力(垂直于纸面)为

$$dF = pdA = (56.2)(12-y)(2x)dy$$

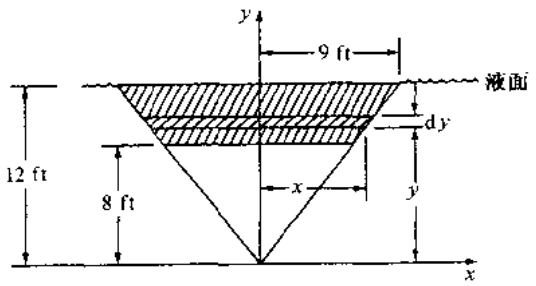


图 6-30

所求之力为上述力元在原点上方 $y=8ft$ 到 $y=12ft$ 区域上对所有水平面积元的积分. 由几何关系可知，$x=\frac{3}{4}y$. 于是

$$F = \int dF = \int_8^{12} (56.2)(12 - y)(2x)\,dy$$

$$= (56.2)(2)\int_8^{12} (12 - y)\left(\frac{3}{4}y\right)dy = 6320\ \text{lb}$$

为确定该合力作用点的垂直位置 $\bar{y}$，可利用 F 对任何轴之矩必等于其所有分量的力矩之和这一关系．对 x 轴是取力矩比较方便的，所以

$$6320\bar{y} = (56.2)(2)\int_8^{12} (12 - y)\left(\frac{3}{4}y\right)(y)\,dy$$

解之，得 $\bar{y} = 9.43$ft．由对称性可知合力作用线垂直纸面与 y 轴相交．

6.21　一钢筋混凝土堤坝的横截面如图 6-31 所示．坝的迎水面形状为抛物线，其顶点位于 A 点．对于垂直于纸面 1m 厚的一段坝，求水作用于曲面 AB 上的合力．水是海水，其密度为 $1.026 \times 10^3 \text{kg/m}^3$．

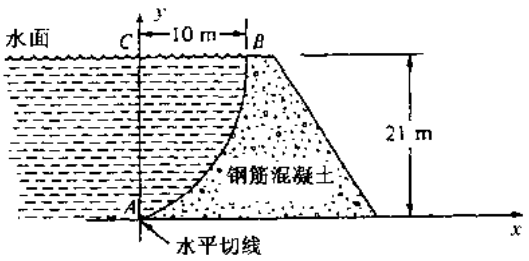


图 6-31

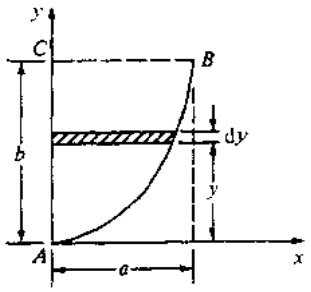


图 6-32

解　☞ 对于图 6-32 中的坐标轴，若抛物线在顶点 A 有水平切线，则方程的形式必是 $y = Kx^2$，为求 K，请注意当 $x = a$ 时，$y = b$；即

$$b = Ka^2 \quad \text{或} \quad K = \frac{b}{a^2}$$

所以抛物线方程为 $y = bx^2/a^2$．

我们先来求面积 ABC 形心的 x 坐标．为此选图 6-32 中有阴影线的面积元．该面积元的形心在距 y 轴 $x/2$ 的地方．积分得

$$\bar{x} = \frac{\int \frac{x}{2}x\,dy}{\int x\,dy} = \frac{\frac{1}{2}\int_0^b \frac{ya^2}{b}dy}{\int_0^b \left(\frac{ya^2}{b}\right)^{1/2}dy} = \frac{3}{8}a$$

ABC 本身的面积等于上式中的分母：$\int_0^b (ya^2/b)^{1/2}dy = \frac{2}{3}ab$

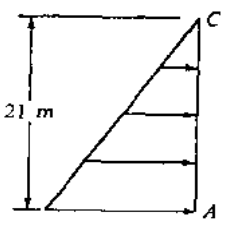


图 6-33

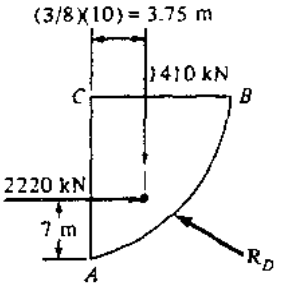


图 6-34

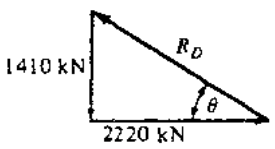


图 6-35

在截面为 ABC 厚 1m 的体积中水施加的垂直力为

$$\frac{2}{3}(10\text{m})(21\text{m})(1.026 \times 10^3 \text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(1\text{m}) = 1410\ \text{kN}$$

水压作用在 1m 厚的垂直平面 AC 上的水平力，可利用图 6-33 中三角形压力分布图形的面积求得．

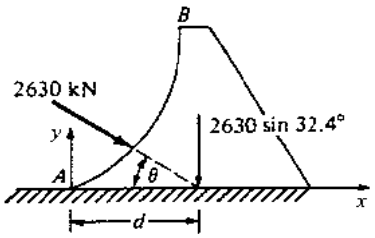


图 6-36

$$\frac{1}{2}(21\text{m})(1.026\times10^3\text{kg/m}^3)(9.81\text{m/s}^2)(21\text{m})(1\text{m})$$

$$=2220\text{ kN}$$

于是，在截面 ABC 厚 1m 的体积中的水有如图 6-34 所示的分离体图. $\boldsymbol{R}_D$ 是坝对 ABC 体积中的水施加的合力.

图 6-34 中的三个力的关系可用图 6-35 中的力三角形来表示. 故

$$\boldsymbol{R}_D\,|^2=(1410)^2+(2220)^2 \text{ 或 } \boldsymbol{R}_D\,|=2630\text{ kN}$$

$$\theta=\arctan\frac{1410}{2220}=32.4^\circ$$

水对堤坝的作用力大小与 $\boldsymbol{R}_D$ 相等但方向相反，如图 6-36 所示. 我们已求得了合力作用的 θ 角，但尚不知作用线在 x 轴的交点 d. 为求 d，可将对 A 点之矩相加，得

$$+\circlearrowright\sum M_A=2220(7)+1410(3.75)=(2630\sin32.4^\circ)d \text{ 或 } d=14.78\text{ m}$$

补充习题

6.22 一条三维空间中的细丝由如下几段组成：一是在 yz 平面中的四分之一圆周 AB；二是在 xy 平面中且平行于 x 轴的直线段 BC；三是仍在 xy 平面中的直线段 CDE，但它延伸到 xz 平面下方 $2R$ 处(图 6-37). 求细丝形心的 y 坐标.

答案：$\bar{y}=0.165R$

6.23 求图 6-38 中平面抛物线面积形心的 y 坐标.

答案：$\bar{y}=2a/5$

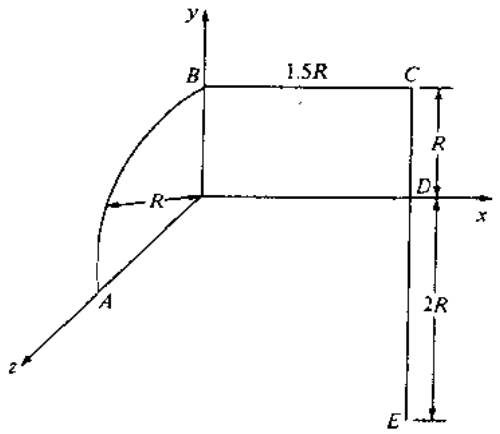


图 6-37

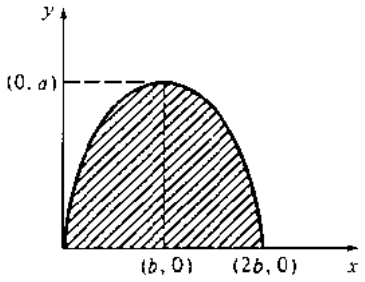


图 6-38

6.24 求图 6-39 中槽形截面形心的位置.

答案：$\bar{y}=4.1\text{mm};\bar{x}=0$

6.25 求图 6-40 中有阴影线图形的形心，该图形是一个半圆去掉一矩形后的剩余部分.

答案：$\bar{x}=0;\bar{y}=70\text{mm}$

6.26 求图 6-41 中有阴影线图形的形心，该图形是一矩形去掉一等边三角形后的剩余部分.

答案：$\bar{x}=0;\bar{y}=102.5\text{mm}$

6.27 求图 6-11 中有阴影线图形形心的 y 坐标.

答案：$\bar{y}=0.637\text{ R}$

6.28 一薄壁正圆锥壳如图 6-42 中那样放置. 求其体积的形心 x 坐标.

答案：$\bar{x}=2H/3$

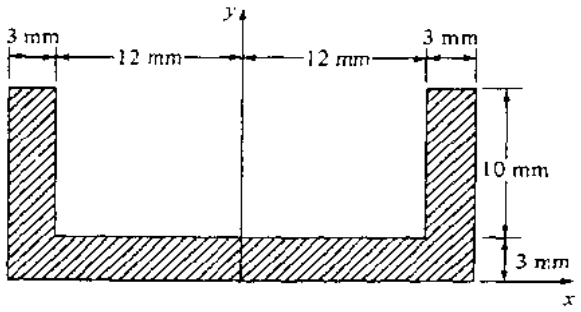


图 6-39

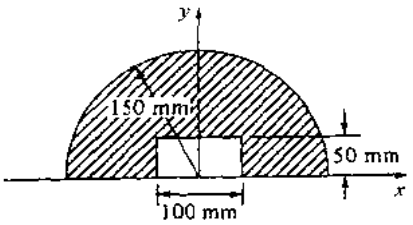


图 6-40

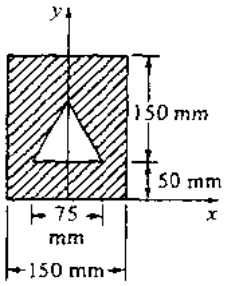


图 6-41

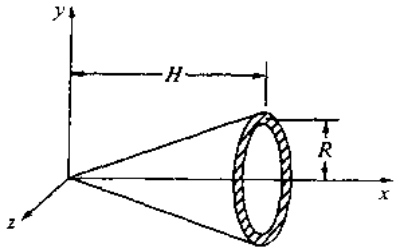


图 6-42

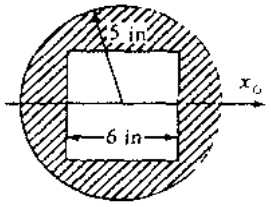


图 6-43

6.29　求图 6-12 中体积形心的 y 坐标.

答案：$\bar{y}=2.67\text{in}$

6.30　求图 6-43 中有阴影线面积对 x_G 轴的惯性矩，该图形是从一个圆中去掉一矩形后剩余的部分，x_G 轴是一根对称轴.

答案：$I_{x_G}=383\text{in}^4$

6.31　求图 6-44 中类似槽形截面的形心，以及该截面相对通过形心的水平轴的第二类矩.

答案：$\bar{y}=38.33\text{mm}$，$I_{x_G}=33\times10^6\text{mm}^4$

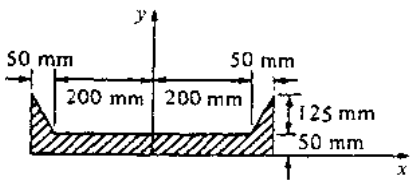


图 6-44

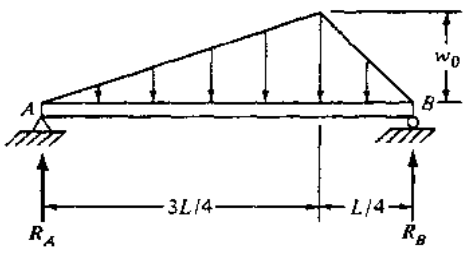


图 6-45

6.32　一艘两栖平底船设计成例题 6.14 中提到的气垫船形式．船为矩形，尺寸是长 18.3m，宽 9.75m．两台风扇产生压强为 6.9kN/m² 的气垫．求该气垫压力所能支撑的最大载荷(船重加有效载荷)．

答案：1231kN

6.33　图 6-45 中的简支梁承受图示垂直方向的载荷．求梁的约束反力．

答案：$|\boldsymbol{R}_A| = \frac{5}{24}w_0L$；$|\boldsymbol{R}_B| = \frac{7}{24}w_0L$

6.34　图 6-46 中的简支梁承受垂直方向呈抛物线变化的分布载荷作用，分布规律为 $y^2 - 54000x$ N/m．求梁的约束反力．

答案：$|\boldsymbol{R}_A| = 322\text{N}$；$|\boldsymbol{R}_B| = 483\text{N}$

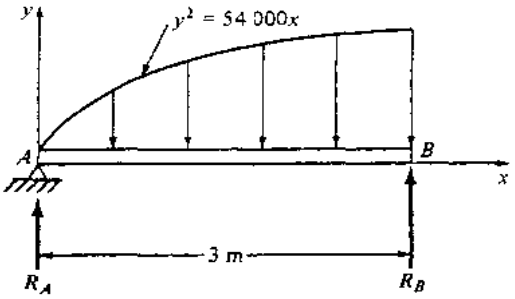


图 6-46

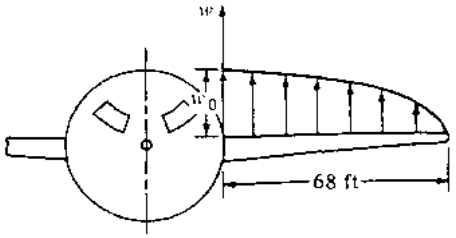


图 6-47

6.35　一架装满燃油和满载的波音 727 飞机重约 142 000 lb．每个机翼上的升力(举力)呈抛物线分布，且对通过机舱中心的垂线是对称的，如图 6-47 所示．每个机翼从机舱外侧量起长约 68ft．求：机翼上单位长度升力的最大值 w_0，该值出现在机翼根部与机舱邻接处．作为一级近似，忽略圆形机身产生的升力．

答案：$w_0 = 1566$ lb/ft

6.36　"充气支架"是一种在高低不平的地面上搬运重物的工具．它有一罩盖，高压空气被气泵注入盖中．空气从罩盖又进入一多路管道，它将空气分配到小管子里．吹过这些小管子的空气在罩盖与地面之间形成一气垫．若图 6-48 中的罩盖直径 10in，气压 85lb/in²，求它所能携带的最大载荷．

答案：6700lb

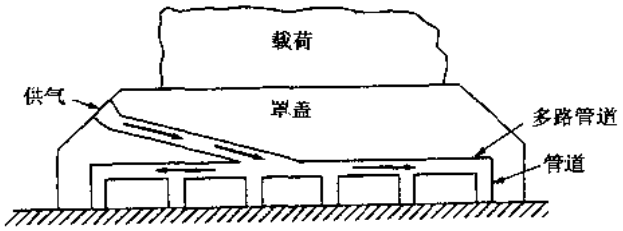


图 6-48

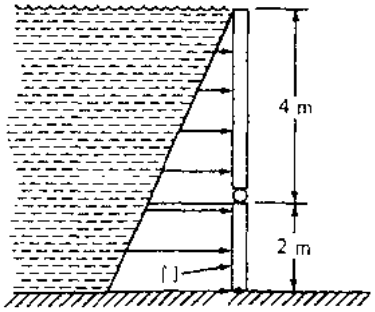


图 6-49

6.37　在例题 6.18 中，烟囱上的风压更为精确的表达式为

$$p = p_0\cos\theta[1 + (z/H)^{0.25}]$$

求作用在烟囱上风力的合力．

答案：$|\boldsymbol{F}| = 7.2p_0rH$

6.38　重新考虑例题 6.19 中比萨斜塔地面压力的分析．求：当塔基北端的地面压力最小值为零时，塔身从其真正的垂直位置倾斜的角度．

答案：5.71°

6.39　在一个矩形水箱的边墙下部有一矩形的门(图 6-49)．门高 2m 宽 3m(在垂直纸面方向上)．求：作用在门上合力的大小和位置．水的比重为 9.81kN/m³．

答案：298.4kN，作用在距箱底 0.94m 处

第七章　轴向力，扭矩，剪切力和弯矩

我们首先来考虑沿直杆长度方向不同载荷的表示方法.涉及到的载荷有：杆方向上的轴向力，扭矩(相对纵轴)，横向载荷(穿过纵轴)引起的剪切力以及弯矩.

轴向力

对轴向载荷，仅用沿杆长度方向延伸的单个坐标来规定载荷的位置(图 7-1).由定义，杆中任一截面上的轴向力，为该截面左侧所有轴向力之和.所以，图 7-1 中若 $x<a$，则 x 截面上的轴向力为 $-\boldsymbol{P}_1$.若 $a<x<b$，则 x 截面上的轴向力为 $\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1$.(见例题 7.1)

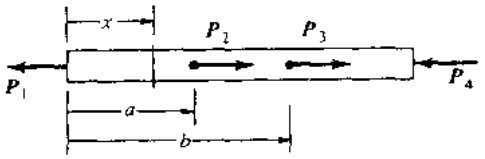


图 7-1

扭矩

对于如图 7-2 中承受扭矩(力偶)作用的杆，使用与表示轴向力相同的坐标系.还是根据定义，杆中任一截面上的扭矩，为该截面左侧所有扭矩之和.究竟选择哪个方向(顺时针或逆时针)为正是任意的.所以，图 7-2 中若 $x<a$，则 x 截面上扭矩为 $\boldsymbol{M}_1$.若 $a<x<L$，则 x 截面上扭矩为 $\boldsymbol{M}_1-\boldsymbol{M}_2$.(见例题 7.2 和 7.3) 一根承受扭矩的杆通常称为**轴**.

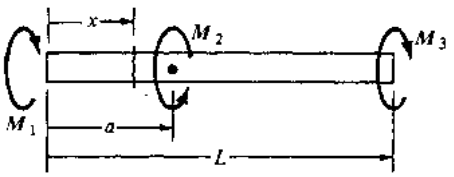


图 7-2

剪切力

如图 7-3 中的横向力也是用单个坐标系统，通常是 x 坐标确定作用位置.由定义，在标为 x(代表任意值)的某横截面的一侧(如左侧)上，所有垂直力的代数和称为该截面上的剪切力，通常记为 $\boldsymbol{V}$.所以，在图 7-3 中的 x_1 处，

$$V = R_1 - P_1 - P_2.$$

一根承受同在杆平面内的横向载荷和(或)力矩作用的杆，称为梁.可用一方程式来表示沿梁长度方向上的每一点的切向力；根据该方程式作出的图形称为剪力图.(剪力图的应用可见例题 7.4 和 7.5)

弯矩

根据定义，一根梁中某一截面一侧(如左侧)上所有外力对该截面上与垂直力正交的轴之

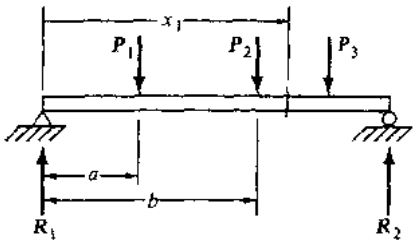


图 7-3

矩的代数和称为该截面上的弯矩，通常记为 M. 所以，图 7-3 中的 x_1 处，

$$M = R_1x_1 - P_1(x_1 - a) - P_2(x_1 - b).$$

与剪切力一样，梁上每一点的弯矩也可用一方程式表示，根据该方程式作的图称为弯矩图.（见例题 7.4 和 7.5）

符号规定

习惯上对剪切力和弯矩的符号规定如图 7-4 所示. 使梁出现上凹弯曲的力矩规定为正弯矩. 若一个力使梁的左侧出现相对右侧向上的切变，则该力施加的是正剪切力.

确定任意截面上弯矩代数符号的一个简易方法是：向上作用的外力产生正的弯矩；向下作用的力产生负弯矩.

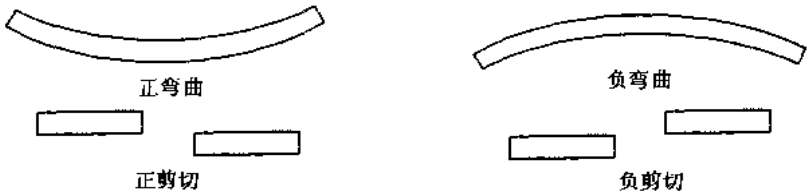


图 7-4

载荷强度、剪切力和弯矩间的关系

一根简支梁如图 7-5 所示. $w(x)$ 表示变化的载荷强度，坐标系原点在梁的左端 A，梁中不同截面与 A 端的距离用变量 x 表示.

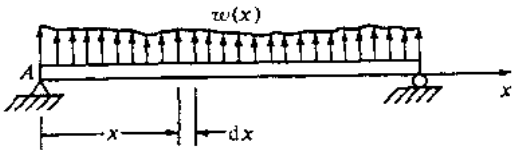


图 7-5

对任意的 x，载荷强度 $w(x)$ 和剪切力 V 之间的关系为

$$w = \frac{dV}{dx}$$

剪切力和弯矩 M 之间的关系为

$$V = \frac{dM}{dx}$$

（见例题 7.4）

奇异函数

为处理涉及集中力和集中力矩的问题方便起见，我们引入奇异函数或半程函数

$$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$$

上式当 $n > 0$ 时，若 $x < a$，则尖括号内的值为零；若 $x > a$，则尖括号就是通常的 $(x - a)$. 所以，当 $x - a$ 这一项为正时，尖括号的作用与普通括号无异. 由此定义，很明显，凡涉及奇异函

数的代数、微分和积分运算都遵守所有通常的规则.（见例题 7.6）

计算机解

涉及需确定沿梁长度方向上的剪切力和弯矩的问题很适合用计算机求解. 确定 V 和 M 的简单程序可用 BASIC 或 FORTRAN 语言编号. 在例题 7.7 中编制了一个 BASIC 程序，在例题 7.8 中应用该程序来解题.

例　　题

7.1　图 7-6 中的均匀截面杆 AF 受三个集中力的作用，同时仅在杆的 BD 段上有分布剪切力作用，该剪切力在 D 点为零，然后按线性规律变化，在 B 点达到峰值为每单位长度 P/L. 写出描述沿杆方向轴向力的方程式并画出作用力图形.

解　将坐标系原点置于点 F 并以指向左侧为正. 在标为 x 的任意截面上，轴向力为该截面右侧所有力的代数和. 所以在 FE 段，有 $N_{FE}=-\mathbf{P}$；在 ED 段，轴向力为 $N_{ED}=-\mathbf{P}+3\mathbf{P}=2\mathbf{P}$.

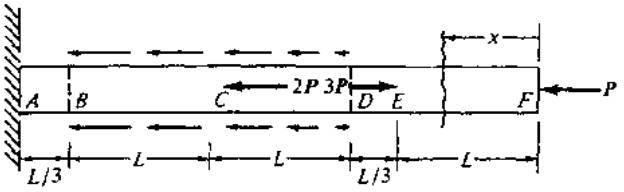


图 7-6

为了计算 D 点左侧截面上的轴向力，我们先来画如图 7-7 所示的剪切图. 由此图，对于 DC 段上任意点 x 可写出

$$N_{DC}=-\mathbf{P}+3\mathbf{P}-\left[\frac{x-4L/3}{2L}\frac{\mathbf{P}}{L}\right]\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4L}{3}\right)$$

$$=2\mathbf{P}-\frac{\mathbf{P}}{4L^2}\left(x-\frac{4L}{3}\right)^2$$

式中带括号的一项为 x 截面上变化的剪切力. 据此方程，可求得 D 和 C 点处的轴向力为

$$N_D=2\mathbf{P}\text{ 和 }N_C=2\mathbf{P}-\frac{\mathbf{P}}{4L^2}\left(\frac{7L}{3}-\frac{4L}{3}\right)^2=\frac{7\mathbf{P}}{4}$$

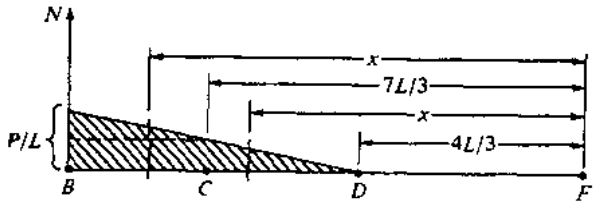


图 7-7

对图 7-7 中杆 CB 段上任意截面 x，将该截面右侧所有力加起来，得

$$N_{CB}=-\mathbf{P}+3\mathbf{P}-2\mathbf{P}-\left[\frac{x-4L/3}{2L}\frac{\mathbf{P}}{L}\right]\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{4L}{3}\right)$$

$$=-\frac{\mathbf{P}}{4L^2}\left(x-\frac{4L}{3}\right)^2$$

由该方程得 C 点（实际上是在 C 点左侧很小距离的地方）的轴向力为 $N_C=-\frac{\mathbf{P}}{4}$，$B$ 点为 $N_B=-\mathbf{P}$.

图 7-7 中载荷图形的面积为 $\frac{1}{2}\left(\frac{\mathbf{P}}{L}\right)(2L)=\mathbf{P}$，故变化的剪切力对 B 点左侧的截面作用一压力

$-P$,这样,

$$N_{AA} = -P + 3P - 2P - P = -P$$

上述五个方程式可画出如图7-8中的轴向力分布图.

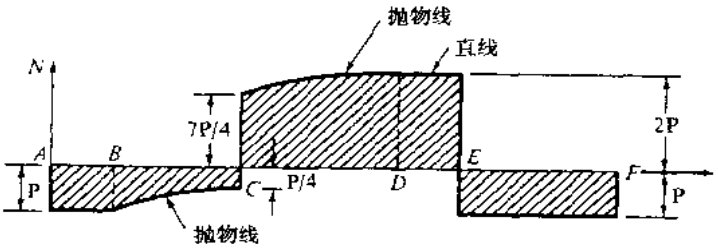


图 7-8

7.2　图 7-9 中的直杆右端紧固,并在AB段承受一均匀分布(每单位轴长为m_T)的扭矩作用,同时在O、B两处受两个集中扭矩的作用.写出沿轴长度方向的扭矩分布方程,并画出轴的扭矩图.

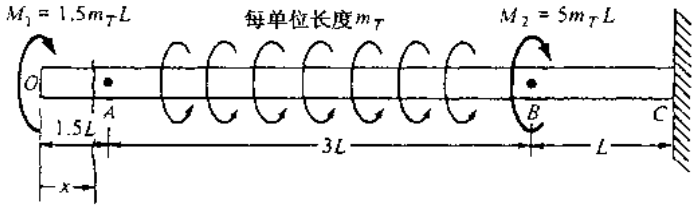


图 7-9

解　☞ 引入以O为原点的坐标轴.在杆的OA段,扭矩就是M_1,因为这是在该段任意截面x的左侧惟一的扭矩.在AB段任意截面x上,扭矩为M_1与该截面左侧分布扭矩之代数和.故

$$在AB\text{ 段}: M_T = 1.5\,m_TL - m_t\,(x - 1.5L)$$

最后,B和C之间的任意截面左侧扭矩的代数和为$M_1 + M_2 - M_t(3L)$:

$$在BC\text{ 段}: M_T = 1.5\,m_TL - 5m_TL - 3m_TL = 3.5\,m_TL$$

由上述这些方程可画出如图7-10的扭矩图.

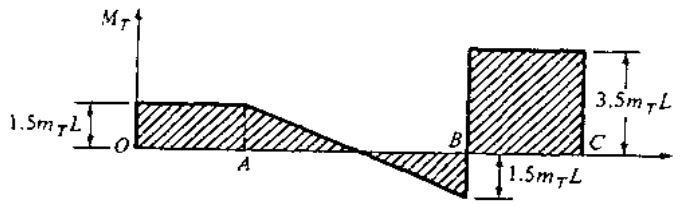


图 7-10

7.3　图 7-11 中的轴 OA 在 A 端固定,并受一均匀变化的分布扭矩作用.该扭矩在 O 点为零,然后强度呈线性增加,到 A 点增至每单位轴长 m_{T_A}.写出沿轴长度方向扭矩分布方程并画出扭矩图.

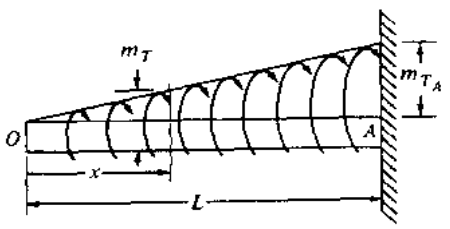


图 7-11

解　☞ 在距左端为 x 的任意截面上,扭矩的强度可由相似三角形求得为

$$m_T = \frac{x}{L} m_{T_A}$$

截面 x 左侧所有扭矩之和等于 x 左侧三角形载荷图

形的面积：

$$M_T = \frac{1}{2} x m_T = \frac{x^2}{2L} m_{T_A}$$

图 7-12 即为根据此方程画出的扭矩图.



图 7-12

7.4 图 7-13 中的简支梁承受垂直分布载荷.该载荷在左端为零，然后均匀增加，在右端增至最大值 9 kN/m.画出梁的剪力图和弯矩图.

解 ☞ 为求约束反力 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$，整个分布载荷可用通过三角形载荷图形形心的合力来代替.合力的大小为载荷图形的面积：(1/2)(6m)(9kN/m)=27 kN，其作用线在左支撑点右侧 4 m 处，如图7-14(a)所示.对梁的两个端点分别取矩求和，可求得 $R_1=9$ kN 和 $R_2=18$ kN.

该合力不能用作画剪力图和弯矩图.我们必须重新考虑分布载荷并确定距左端为 x 的截面上的剪切力和弯矩，如图 7-14 (b)所示.在截面 x 上，载荷强度 w 可由相似三角形 OAB 和 OCD 求得，为 $\frac{3x}{2}$kN/m.作用在 x 截面左侧总的载荷(三角形 OAB 的面积)为(1/2)(3x/2)(x)，其作用线通过三角形 OAB 的形心，即通过距离 O 点 $\frac{2}{3}x$ 的那一点(如图 7-14 (b)中虚线矢量所示).

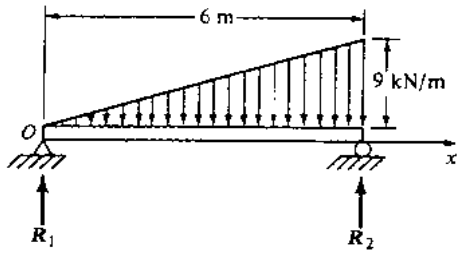


图 7-13

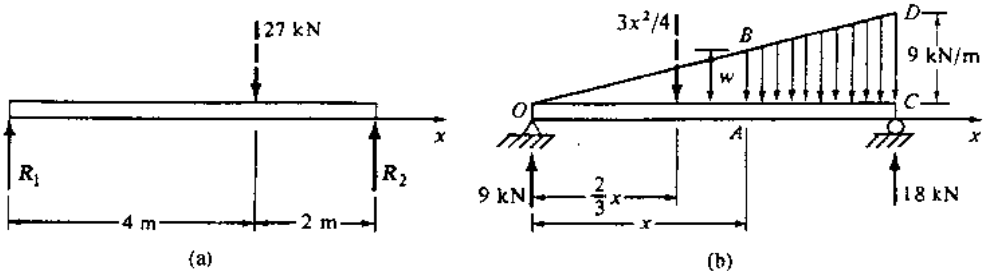


图 7 14

A 点的剪切力和弯矩现在很容易求得

$$V = 9 - \frac{3x}{4} x = 9 - 0.75x^2 \text{kN}$$

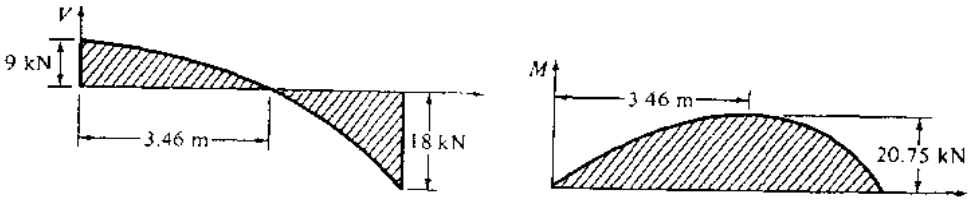
$$M = 9x - \frac{3x^2}{4} \frac{x}{3} = 9x - 0.25x^3 \text{kN} \cdot \text{m}$$

上面两个方程沿整个杆的长度都成立.剪切力图画出来是一抛物线，且当 $x=0$ 时，其值为 9 kN；当 $x=6$ m时，其值为 −18 kN.弯矩方程是一个三次多项式.它在杆的两端为零，且在剪切力为零处有最

大值.(因为 $V=\mathrm{d}M/\mathrm{d}x$,剪切力为零的点必是弯矩图上切线呈水平方向的点.)该剪切力为零的点可通过设上式中的 $V=0$ 而求得,即 $x=3.46$ m.该点的弯矩可将上述表达式中 x 替代后求得

$$M_{x=3.46}=9(3.46)-0.25(3.46)^3=20.75\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

图 7-15 即为所求的剪力图和弯矩图.



(a) 剪切力图　　(b) 弯矩图

图 7-15

7.5　图 7-16 中的梁 AE 简支在 B、D 两处,两端皆伸出支点之外.梁受 4 kN/m 的均布载荷作用,同时有 8 kN·m 的力偶作用于 C 点.画出梁的剪力图和弯矩图.

解　由对 B 点的力矩之和和垂直方向诸力之和两个静平衡方程式可确定约束反力:

$$+\circlearrowleft\sum M_B=4\,|\boldsymbol{R}_D|-8-4(6)(2)=0\quad\text{或}\quad|\boldsymbol{R}_D|=14\ \text{kN}$$

$$\sum F_v=|\boldsymbol{R}_B|+14-4(6)=0\quad\text{或}\quad|\boldsymbol{R}_B|=10\ \text{kN}$$

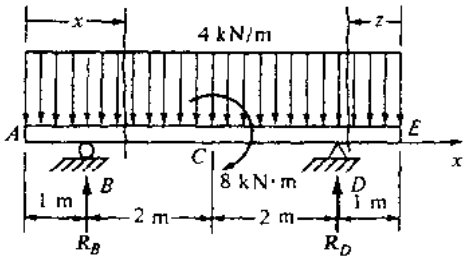


图 7-16

引入原点在 A 的坐标系.在 AB 段,在距 A 点为 x 的任一截面上剪切力为该截面左侧分布载荷的合力.该合力很明显是一大小为 $4x$ kN 向下作用的力.故有

$$V=-4x\ \text{kN}\quad 0<x<1\ \text{m}\qquad(1)$$

当 $x=1$ m 时,剪切力为 -4 kN.在 $x=0$ 时,剪切力自然为零.

一旦进入 B 点右侧区域,约束反力 $\boldsymbol{R}_B$ 就出现在剪切力方程中.对于 BD 段中距 A 点为 x 的任一截面,其剪切力为该截面左侧作用力之和.即

$$V=-4x+10\ \text{kN}\quad 1\ \text{m}<x<5\ \text{m}\qquad(2)$$

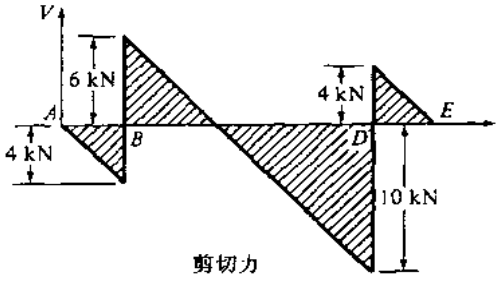
C 点的力偶在剪切力方程中不出现,因为该力偶在任何方向不具有力的效应.然而,力偶的确间接出现在剪切力方程中,因为它会影响约束反力 $\boldsymbol{R}_B$ 和 $\boldsymbol{R}_D$ 的大小.将 $x=1$ m 和 $x=5$ m 代入式(2),得 $V_{x=1}=6$ kN 和 $V_{x=5}=-10$ kN.

当 x 的值大于 5 m 后,约束反力 $\mathbf{R}_D$ 必须包括在剪切力方程中.将在 DE 段中截面 x 左侧的力相加,得

$$V=-4x+10+14\ \text{kN}\quad 5\text{m}<x<6\ \text{m}\qquad(3)$$

将 $x=5$ m 和 $x=6$ m 代入式(3),得 $V_{x=5}=4$ kN 和 $V_{x=6}=0$ kN.

梁上任意点的剪切力就由方程式(1)、(2)和(3)中的一个确定.因为在每一个方程式中 V 都是 x 的一次函数,所以在每一段上剪力图都是直线.各段端点的纵坐标值已通过代入法求得.将这些点标出,然后



剪切力

图 7-17

用直线连接起来就得到如图 7-17 所示的剪力图.

为写出沿梁的弯矩方程，我们再一次从左端开始. 在 AB 段距 A 点为 x 的任意截面上，有向下作用的分布载荷 $-4x$，该载荷产生的弯矩为

$$M = -4x\frac{x}{2} = -2x^2 \quad \text{当 } 0 < x < 1\text{ m}$$

在 BC 段，一旦进入 10 kN 约束反力的右侧区域，弯矩变为

$$M = -4x\frac{x}{2} + 10(x-1) = -2x^2 + 10x - 10 \quad \text{当 } 1\text{m} < x < 3\text{m}$$

特别是在 C 点（$x = 3$ m），$M_{x=3} = 2$ kN·m.

在 CD 段，对距原点 A 为 x 的任意截面，弯矩还是 x 左侧所有载荷的力矩之和. 这必定包括向下作用的均布载荷，向上作用 10 kN 的约束反力和 8 kN·m 的力偶. 为正确确定该力偶的正负号，我们考虑假如它单独作用在梁上 C 点右侧区域所产生的效应（因为我们是从左向右求解的）. 该力偶将产生如图 7-18 的弯曲.

对应这样的弯曲，则力偶必是正的. 所以 CD 段上的弯矩为

$$M = -4x\frac{x}{2} + 10(x-1) + 8 = -2x^2 + 10x - 2$$

$$\text{当} \quad 3\text{m} < x < 5\text{m}$$

紧靠 C 点右侧，由上面方程可知 $M_{x=3} = 10$ kN·m.

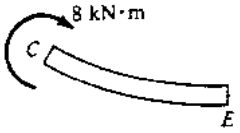


图 7-18

最后来确定 DE 段上的弯矩方程. 最简单的方法是引入一新的坐标 z. 该坐标系原点在 E 点，并以指向左侧为正. 因为在 E 点和截面 z 之间惟一的作用力就是均布载荷，故

$$M = -4z\frac{z}{2} = -2z^2 \quad \text{当 } 0 < z < 1\text{ m}$$

上面每一段上的弯矩方程都是二次的，并容易证明在每一段上曲率为负值，即曲线凹向下方. 于是弯矩图如图 7-19 所示. 图上在 C 点的 8 kN·m 突然跃增对应于作用于 C 点的力偶的力偶矩大小.

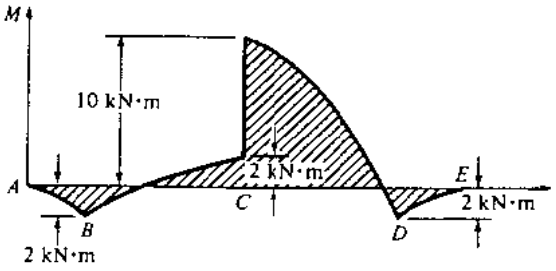


图 7-19　弯矩

7.6　图 7-20(a)中的简支梁受一长度仅有 2 m 的均布载荷作用. 利用奇异函数写出单个方程描述梁上任意点的弯矩

解　由对称性，两端的约束反力显然都是 2 kN. 引入一坐标系，其原点在 O 点，正向指向右方. 对梁上任意截面 x，由左端约束反力引起的弯矩为 $2x$.

对位于分布载荷两端点之间的任意截面 x，由 x 左侧的部分分布载荷引起的弯矩为

$$-2\langle x-1\rangle\frac{\langle x-1\rangle}{2}$$

上述表达式含有该分布载荷一直延伸到梁右端的意思，但实际上载荷在距左支撑点 3 m 处就没有了. 作为一种冀巧，我们可以在右端无载荷区引入一个强度为 2 kN/m 向上作用的补偿均布载荷（如图 7-20(b)所示），来抵消在该区域 2 kN/m 向下作用的额外载荷. 该向上作用的载荷弯矩为

$$2\langle x-3\rangle\frac{\langle x-3\rangle}{2}$$

将上述结果合起来，得到描述梁上任意截面弯矩的单个方程：

$$M = 2x - \langle x-1\rangle^2 + \langle x-3\rangle^2$$

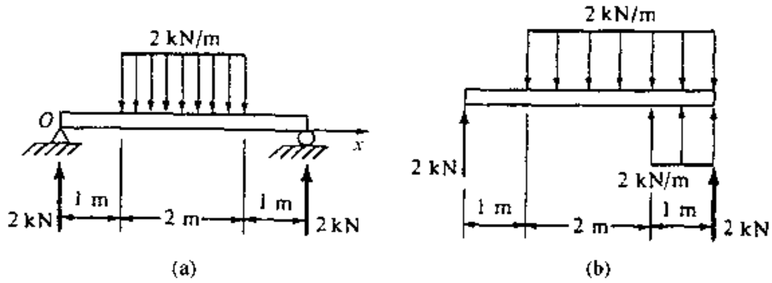


图 7-20

7.7 考虑一根直杆，其两点简支，支点不一定就是杆的端点(也就是说，杆的一端或两端可以伸到支点之外). 梁同时承受横向的集中力. 垂直于梁所在平面(图 7-21 的纸面)轴的集中弯矩以及分布载荷的作用. 分布载荷可以均布在梁给定的长度上，也可以从梁上一点到另一点强度呈线性变化. 用 BASIC 语言编制一计算机程序，求解沿梁长度方向每一点的剪切力和弯矩.

解 必须补充如图 7-21 所示的梁的分离体图. 建立 xyz 坐标系，其正向如图所示. 沿 y 轴正向的(即向上作用)集中(点)载荷和分布载荷取为正值. 双箭头矢量表示作用的力矩(如图中的 $\boldsymbol{M}_3$)，且沿 z 轴正向的取为正值. 所有负的载荷在输入计算机时必须标注清楚. 约束反力(本题中即 $\boldsymbol{P}_2$ 和 $\boldsymbol{P}_7$)应该利用前面章节中提到的方法确定.

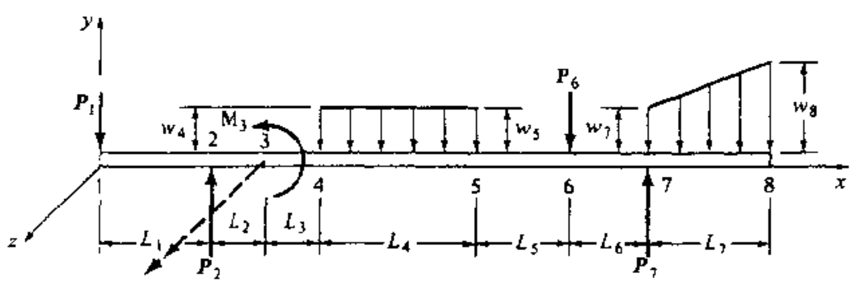


图 7-21

集中力和力矩的作用点以及分布载荷的两个端点必须从 1 开始编序号，如图 7-21 所示. 最好将载荷、力矩和载荷强度也编以同样的序号，如图中所示. 这样，比如说，我们就有负的载荷 $\mathbf{P}_1$，正的力矩 $\mathbf{M}_3$(根据右手法则)，和负的载荷强度 w_8. 最后，所有编号点(图中 $L_1, L_2, \cdots, L_7$)之间的杆长必须告之. 这些相关的信息以适当的形式在下面的 BASIC 程序中加以运用：

```
10  OPTION BASE 1
20  DIM SEGMENTLENGTH(20),POINTLOAD(21),EXTERMOM (21),DISTRULOAD(20,2)
30  DIM SHEAR(21,2),MOMENT(21,2)
40  PRINT "PROGRAM SHEAR AND MOMENT"
50  PRINT "- - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - - -"
60  PRINT
70  INPUT "PLEASE ENTER THE NUMBER OF SEGMENTS:",NUMSEG
80  PRINT
90  PRINT "PLEASE ENTER THE LENGTH OF EACH SEGMENT FROM LEFT TO RIGHT."
100  FOR I = 1 TO NUMSEG
110    INPUT SEGMENTLENGTH(I)
120  NEXT I
```

```
130  PRINT
140  INPUT "PLEASE ENTER THE NUMBER OF POINT LOADS:",NUMPOINT
150  PRINT
160  FOR I = 1 TO NUMPOINT
170    INPUT "LOCATION AND LOAD:",INSIDE,POINTLOAD (INSIDE)
180  NEXT I
190  PRINT
200  INPUT "PLEASE ENTER THE NUMBER OF EXTERNAL MOMENTS:",NUMMOMENT
210  PRINT
220  FOR I = 1 TO NUMMOMENT
230    INPUT "LOCATION AND MOMENT:",LOCATION,EXTERMOM (LOCATION)
240  NEXT I
250  PRINT
260  INPUT "PLEASE ENTER THE NUMBER OF LOADED SEGMENTS:",NUMSEGLOAD
270  PRINT
280  FOR I = 1 TO NUMSEGLOAD
290    INPUT "SEGMENT NUMBER,LOADLEFT,LOADRIGHT:",NUM,DISTRULOAD (NUM,1),DISTRULOAD (NUM,2)
300  NEXT I
310  PRINT
320  SHEAR (1,2) = POINTLOAD(1)
330  MOMENT(1,2) = - EXTERMOM(1)
340  FOR I = 1 TO NUMSEG
350    SHEAR(I + 1,1) = SHEAR(I,2) + (DISTRULOAD(I,1) + DISTRULOAD(I,2)) * S EGMENTLENGTH(I)/2
360    SHEAR(I + 1,2) = SHEAR(I + 1,1) + POINTLOAD(I + 1)
370    TEMP = ((2 * DISTRULOAD(I,1) + DISTRULOAD(I,2)) * SEGMENTLENGTH(I)^2)/6
380  MOMENT(I + 1,1) = MOMENT(I,2) + SHEAR(I,2) * SEGMENTLENGTH(I) + TEMP
390  MOMENT(I + 1,2) = MOMENT(I + 1,1) - EXTERMOM(I + 1)
400  NEXT I
410  PRINT
420  LPRINT "LOCATION","SHEARLEFT","SHEARRIGHT","MOMENTLEFT","MOMENTRIGHT"
430  FOR I = 1 TO NUMSEG + 1
440    LPRINT I,SHEAR(I,1),SHEAR(I,2),MOMENT(I,1),MOMENT(I,2)
450  NEXT I
460  END
```

上述程序是以 100/GW 版本的 BASIC 语言写成的.用其他版本编写的程序在输入格式上略有变动.例如,上述程序只接受以竖栏格式输入的数据;而其他版本的 BASIC 程序要求使用水平行格式.计算机在屏幕上列表显示紧靠编号点左侧和右侧的剪切力和弯矩.于是,若要了解任何指定点的 V 和 M 的值,只需将该点按顺序编以序号.剪力图和弯矩图就很容易由输出的数据画出来;或者通过一个补充的小程序使用计算机控制的作图仪.

该程序适用于任何统一的物理量单位制.

7.8 利用例题 7.7 中的 BASIC 程序重解例题 7.5.

解 ☞ 例题 7.5 中的图(图 7-16)经过必要的修改后变成图 7-22.为回答程序的提示而要输入的数据有

梁划分的段数:4
每段梁的长度:1
2
2
1

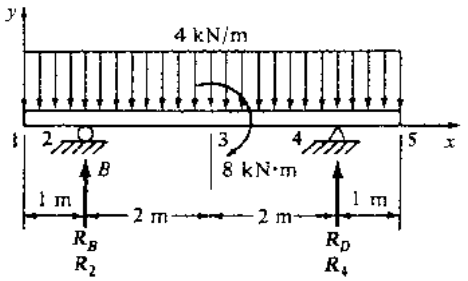


图 7-22

点载荷的数目:2
位置和载荷值:2,10
4,14
外力矩数目:1
位置和力矩值:3,-8
分布载荷的段数:4
段序号、左侧载荷、右侧载荷:1,-4,-4
2,-4,-4
3,-4,-4
4,-4,-4

计算机输出为

位置	左侧剪切力	右侧剪切力	左侧弯矩	右侧弯矩
1	0	0	0	0
2	-4	6	-2	-2
3	-2	-2	2	10
4	-10	4	-2	-2
5	0	0	0	0

这些数据可供作出例题 7.5 所要求的剪切力图和弯矩图.

补 充 习 题

7.9 图 7-23 中的均匀截面杆左端紧固并受剪切力作用,剪切力在 A 端为零,然后呈线性变化,在 B 端达到峰值为每单位杆长 q. 写出沿杆长度方向轴向力方程并画出轴向力图.

答案:$N = qL/2 - qx^2/2L$;图 7-24

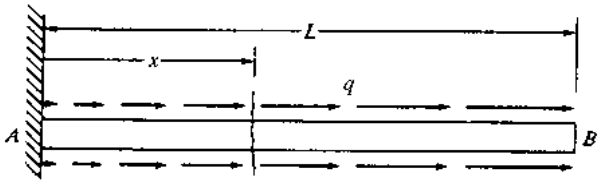


图 7-23

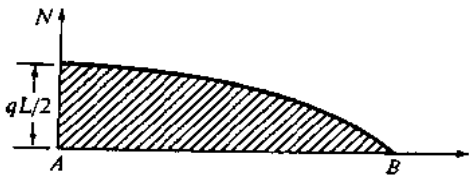


图 7-24

7.10 图 7-25 中的均匀截面杆受三个集中力和一个大小为 1.5 kN/m 剪切力作用. 写出沿杆长度方向轴向力方程并画出轴向力图.

答案:AB 段,$N = -7 - 1.5x$;BC 段,$N = -3 - 1.5x$;CD 段,$N = -11 - 1.5x$;图 7-26

7.11 图 7-27 中的轴由两个无摩擦的轴承支撑并承受图示五个扭矩作用. 写出轴上四个区域中的扭矩方程并画出扭矩图.

答案:AB 段,$M_T = 10$ kN·m;BC 段,$M_T = -50$ kN·m;CD 段,$M_T = -30$ kN·m;DE 段,$M_T = -10$ kN·m;图 7-28

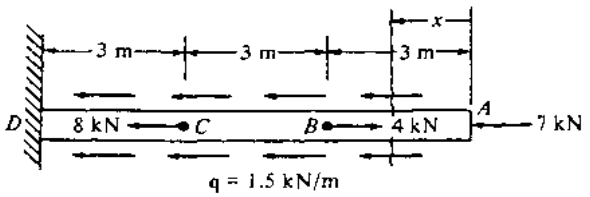


图 7-25

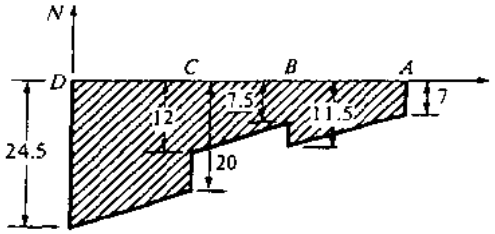


图 7-26

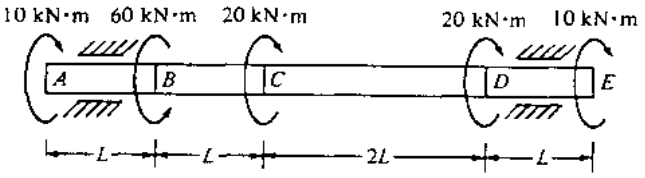


图 7-27

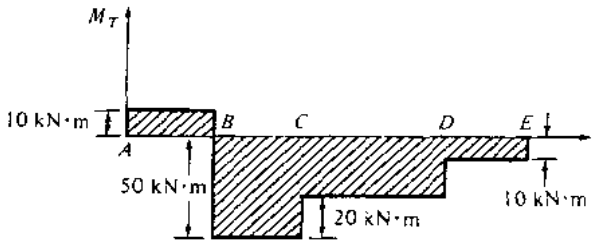


图 7-28

7.12　图 7-29 中的轴 AC 右端紧固并承受均匀分布在 AB 和 BC 两区域上扭矩的作用，扭矩的强度为每单位轴长 m_t。写出沿轴的扭矩方程并画出扭矩图。

答案：AB 段，$M_t = m_T x$；BC 段 $M_t = m_T L - m_T(x - L)$；图 7-30

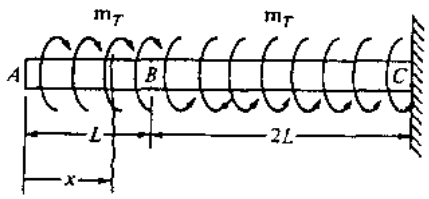


图 7-29

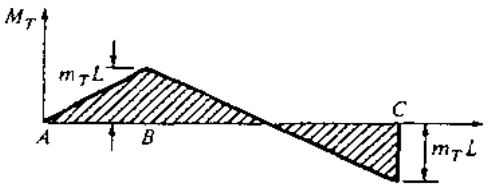


图 7-30

7.13 图 7-31 中的轴 AB 右端紧固并在 O 端受 40 kN·m 的集中扭矩作用. 该轴还承受一均匀变化的分布扭矩作用,该扭矩在 A 点为零,然后强度呈线性增加,在 B 点为 60 kN·m/m. 写出沿轴的扭矩方程并画出扭矩图.

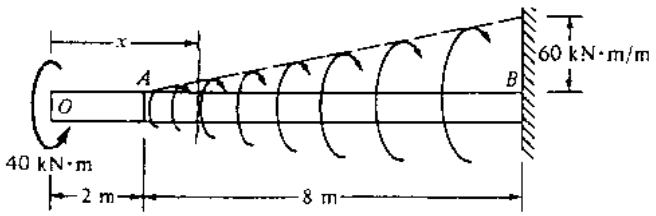


图 7-31

答案:OA 段,$M=-40$ kN·m;AB 段,$M=\left[-40+\frac{15}{4}(x-2)^2\right]$kN·m;图 7-32

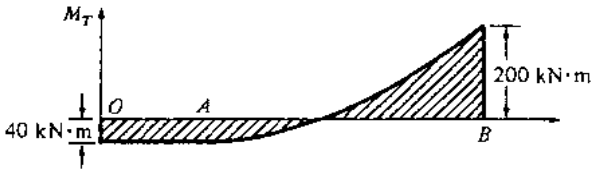


图 7-32

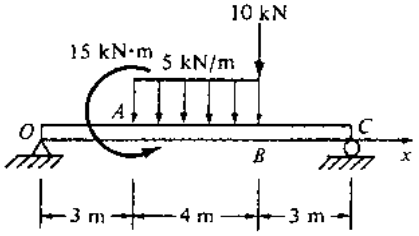


图 7-33

7.14 图 7-33 中的简支梁承受一力偶、一集中力和一分布载荷的作用. 写出沿梁长度方向的剪切力方程和弯矩方程并画出剪力图和弯矩图.

答案:当 $0<x<3$ 时,$V=14.5$ 和 $M=14.5x$;当 $3<x<7$ 时,$V=14.5-5(x-3)$ 和 $M=14.5x-15-2.5(x-3)^2$;当 $7<x<10$ 时,$V=-15.5$ 和 $M=14.5x-15-2.5(x-3)^2-10(x-7)$;图 7-34

7.15 图 7-35 中的简支梁受一向下的力和一力偶的作用. 利用奇异函数写出沿梁长度方向的弯矩方程.

答案:$M=2.857+10\langle x-2\rangle^0-15\langle x-5\rangle$

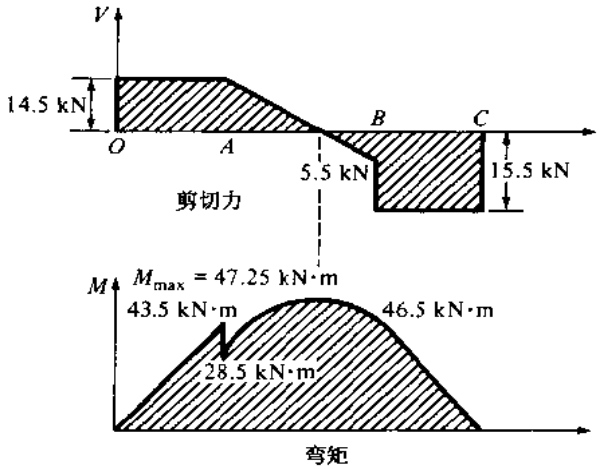


图 7-34

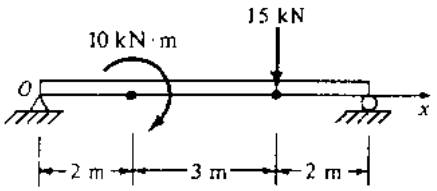


图 7-35

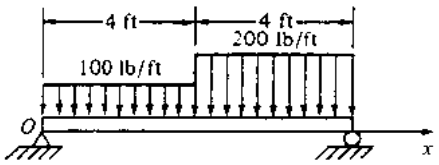


图 7-36

7.16　图 7-36 中的简支梁受两个图示均布载荷的作用．利用奇异函数写出梁上任意点的弯矩方程．

答案：$M = 500\langle x\rangle^2 - 50\langle x\rangle^2 - 50\langle x-4\rangle^2$

7.17　利用例题 7.7 中的 BASIC 程序求图 7-37 中梁上编了序号处的剪切力和弯矩．

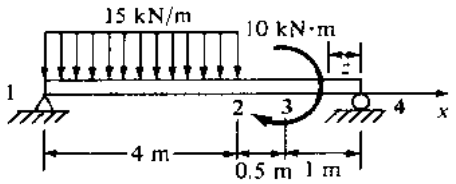


图 7-37

答案：

位置	左侧剪切力	右侧剪切力	左侧弯矩	右侧弯矩
1	0	36.36	0	0
2	−23.64	−23.64	25.44	
3	−23.64	−23.64	13.62	
4	−23.64	0	−1.999664E−02	−1.999664E−02

7.18　图 7-38 中的简支梁受一强度呈线性增加的分布载荷作用．利用例题 7.7 中的 BASIC 程序求编号处的剪切力和弯矩．

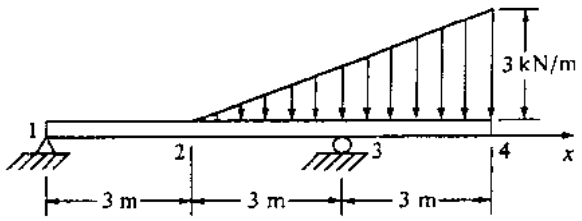


图 7-38

答案：

位置	左侧剪切力	右侧剪切力	左侧弯矩	右侧弯矩
1	0	−1.5	0	0
2	−1.5	−1.5	−4.5	−4.5
3	−3.75	6.75	−11.25	−11.25
4	0	0	0	0

第二部分　可变形体力学

第八章　应力应变分析

法向应力

若用一平面去截一个承受外载荷作用的物体，并将平面某一侧的物体去掉，则物体剩余部分的分离体图必显示出作用于该截面上的力；该力代表被去除部分的物体的作用．该力垂直于平面的分量称为法向分量或法向力．将法向力的大小除以其作用的面积得到法向应力 σ．(见例题 8.1)

剪切应力

由上述定义的作用于截面上的力，通常在平面本身所在方向(即在平面内)也有分量．这一分量称为剪切力．将该剪切力的大小除以其作用的面积得到剪切应力 τ．(见例题 8.1)

点的一般应力状态

若假设从一个承受外载荷作用的物体上截出一个尺寸很小的三维长方体，则在长方体的六个面的每一面上均有一法向应力和两个剪切应力，如图 8-1 所示．然而，在由该长方体所表示的点上，这些应力中只有六个是独立的．(见例题 8.1)

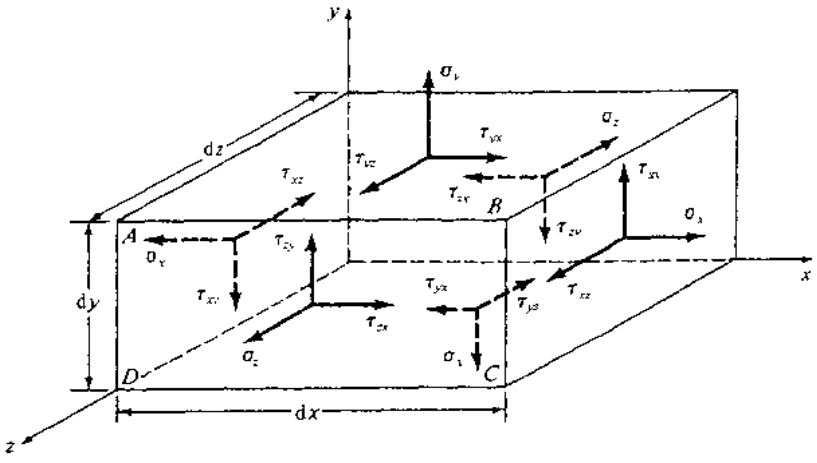


图 8-1

注意，在图 8-1 中，按惯例应力用粗黑箭头表示，但并不像矢量那样用黑体字标．

主应力

图 8-1 中的长方体只显示出作用于与 xy、xz 和 yz 平面平行的各平面上的应力．另外，长

方体中所有面向其他方向的平面上，均有法向应力和剪切应力作用，只有一个例外，即在一组相互垂直的平面上剪切应力为零．这样的面称为主平面，而在主平面上的法向应力称为主应力．在所有可能通过某一点的平面上，主应力中有最大和最小的法向应力．

在某一点上，设主应力 σ 作用在一平面上，该平面法向相对于 x、y 和 z 轴的方向余弦为 l、m 和 n．于是该点的三个主应力为方程

$$\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0 \tag{8.1}$$

的根，其中

$$\begin{aligned} I_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \\ I_2 &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z - \tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 \\ I_3 &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \end{aligned} \tag{8.2}$$

对于每一个根（每一个主应力），其方向余弦 l、m、n 可由下面一组方程求得：

$$\begin{aligned} \sigma l &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \\ \sigma m &= \tau_{xy} l - \sigma_y m + \tau_{yz} n \\ \sigma n &= \tau_{xz} l - \tau_{yz} m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{8.3}$$

和

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{8.4}$$

在二维问题中，某点的法向应力为 σ_x 和 σ_y，剪切应力为 τ_{xy}，则主应力为

$$\sigma = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{8.5}$$

（见例题 8.4 和 8.8）

主应力方向

在承受载荷的实心体中任一点上，主应力作用的方向称为主应力方向，或简称为主方向．在二维的条件下，主方向与 x 轴之间的夹角 θ_p 由

$$\tan 2\theta_p = \frac{\tau_{xy}}{(\sigma_x - \sigma_y)/2} \tag{8.6}$$

确定．该方程的根有多值，只有前两个根我们感兴趣．

最大剪切应力

相对主平面来说，最大剪切应力所在平面法向的方向余弦为

$$\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad 0, \quad \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \tag{8.7}$$

对应于上述方向的剪应力 τ 的大小分别是

$$\tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2), \quad \tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3), \quad \tau = \pm\frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) \tag{8.8}$$

最大剪切应力值总是等于最大主应力与最小主应力差值的一半，即

$$\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) \tag{8.9}$$

并且最大剪切应力所在平面恰好平分 $\sigma_{\max}$ 和 $\sigma_{\min}$ 所在主平面之间的夹角．

法向应变

作用在物体上的载荷导致该物体的变形．一根受拉或受压的杆在单位长度上长度的变化称为法向应变 ε．将杆长度的变化除以杆的初始长度即可算出 ε，故它是一无量纲的量．

剪切应变

假设在一个无外载荷物体表面的某一点标上一个直角．施加载荷后出现的角度变化称为

该点的剪应变 γ. 角度必须以弧度表示，故剪应变也是无量纲的.

斜面上的应变

与应力一样，应变不仅会出现在与坐标平面平行的平面上，也会出现在过某一点所有可能的平面上. 考虑图 8-2 中的矩形元 $OABC$，它承受 x 和 y 方向上的拉力以及沿边界作用的剪切力. 沿与 x 轴成 θ 角的任意轴 x'，该载荷产生的法向应变为

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\cos 2\theta + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin 2\theta \tag{8.10}$$

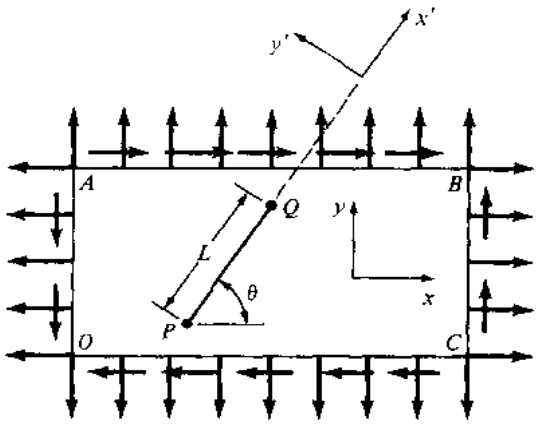


图 8-2

相对于图示的 x' 和 y' 轴，载荷产生的剪应变为

$$\gamma_{x'y'} = -(\varepsilon_x - \varepsilon_y)\sin 2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta \tag{8.11}$$

(见例题 8.13)

主应变

在通过某一点所有可能的平面上出现的法向应变中的最大值和最小值称为该点的主应变. 在二维问题中，若法向应变为 ε_x 和 ε_y，剪应变为 γ_{xy}，则主应变由下式确定：

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_x - \varepsilon_y}{2}\right)^2 + \left(\frac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \tag{8.12}$$

主应变出现的方向称为主应变方向. 主应变方向与 x 轴之间的夹角 θ_p 由下面方程的前两个根确定：

$$\tan 2\theta_p = \frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x - \varepsilon_y} \tag{8.13}$$

(见例题 8.17)

应力-应变曲线

考虑一根杆，它承受的拉力不断增加. 将由此产生的法向应力和法向应变的对应数值画成曲线，就得到了该材料的应力-应变曲线. 对一些普通的工程材料，包括特殊的金属材料，这条曲线的初始部分是直线，如图 8-3 所示.

合成橡胶一类的高分子材料的应力-应变行为如图 8-4 所示.

对很多种类的钢材，它们的应力-应变曲线近似如图 8-5 所示，即在线性区之后是一曲服区，在该区域内随着应变的增加并没有出现相应的应力增加. OA 段称为该材料的弹性区，AB 段称为塑性区或曲服区. 产生曲服的应力值 σ 称为该材料的曲服点.

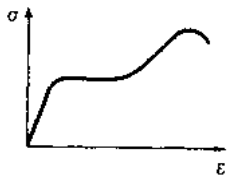


图 8-3

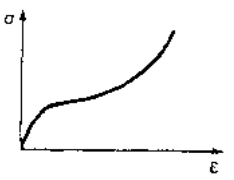


图 8-4

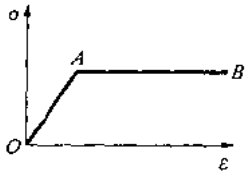


图 8-5

对承受剪切力作用的物体，也可以作出类似的应力-应变曲线.

弹性模量

一种材料的弹性模量或杨氏模量 E 就是该材料应力-应变曲线中直线部分的斜率(见图 8-3 和图 8-5).因为应变是无量纲的，所以 E 具有应力的量纲，如每平方米牛顿(帕)或每平方英寸磅.

比例极限

对于某一种材料，当应力仍是应变的线性函数时，其最大的拉伸应力称为该材料的比例极限.并非所有的材料都有比例极限.

弹性极限

在载荷撤除后材料上没有留下残余变形的条件下，材料中出现的最大拉伸应力称为该材料的弹性极限.对许多金属材料来说，弹性极限和比例极限几乎是一致的.对于这两个极限值不一致的材料来说，弹性极限往往大于比例极限.

各向同性和各向异性材料

若某种材料在其任何点和所有的方向上具有相同的弹性，则称为是各向同性的.

若某种材料在其上一点的不同方向上具有不同的弹性，则称为是各向异性的.这对于现代复合材料来说是十分典型的性质.

均匀和非均匀材料

若某种材料在其上所有点皆具有相同的弹性，则称为是均匀的.

若某种材料在其上不同的点具有不同的弹性，则称为是非均匀的.由两层薄的金属面夹一层芯材料(通常是六角形蜂窝结构)构成的夹层式材料就是非均匀的.

对于均匀的、各向同性的材料，其主应力的方向与主应变的方向一致.(见例题 8.17)

位移

在由载荷引起变形的固体中，一个点将会在 x、y 和 z 方向上出现距离分别为 u、v 和 w 的位移.位移具有长度的单位.

在二维载荷的条件下，在发生变形物体的每一点上，法向应变 ε_x 和 ε_y 以及剪应变 γ_{xy} 与位移 u 和 v 的关系为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{8.14}$$

(见例题 8.12)

协调方程

在二维载荷作用下出现的变形中，某一点上的法向应变和剪应变是不独立的，而是由协调

方程相联系的：

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{8.15}$$

泊松比

当一根杆承受单纯拉伸载荷作用时，杆的长度（沿载荷作用方向）增加，但横向尺寸（垂直于载荷方向）减小．横向应变与轴向应变之比称为泊松比．在本书中泊松比用 μ 表示．对大多数金属材料来说，该比值的范围在 0.25 和 0.34 之间（见例题 8.14 至 8.16）

胡克定律

对于一根在弹性范围内承受拉伸载荷作用的杆，胡克定律告诉我们，$\sigma = E\varepsilon$，其中 E 为应力-应变曲线的斜率．在三维载荷的情况中，横向收缩效应必须加以考虑；所以胡克定律一般的三维形式为

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] \end{aligned} \tag{8.16}$$

线性热膨胀系数

物体正常的行为是热胀冷缩．当温度变化 1 度时，杆的单位长度上长度的变化称为该材料的线性热膨胀（或冷收缩）系数 α．该参数的值不依赖于长度的单位，但依赖于温标的选取．它的单位为每摄氏度或每华氏度．

体积增量

一个承受外载荷的固体其单位体积出现的体积变化称为该物体的体积增量 e．e 是无量纲参数，且通常认为有近似关系式 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$（见例题 8.15）．

利用 e 可以将胡克定律(8.16)重新表示，即将应力表示为应变的函数：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x \\ \sigma_y &= \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_y \\ \sigma_z &= \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)}e + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_z \end{aligned} \tag{8.17}$$

体积弹性模量

若一固体承受均匀的流体静压力 p，则有 $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$．由胡克定律可知，对应的法向应变为

$$\varepsilon_x = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\frac{p}{E}(1-2\mu) \tag{8.18}$$

设 $e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$，并求解 $-p/e$ 得

$$-\frac{p}{e} = \frac{E}{3(1-2\mu)} \equiv K \tag{8.19}$$

式中负号表示随压力的增加体积减小．上面这个方程定义了体积弹性模量为流体静压力与由其产生的体积应变之比的负值，可以写成 $K = -p/(\Delta V/V)$．

体积弹性模量的单位与压力的单位相同．（见例题 8.18）

平衡微分方程

受载物体上一个微元的法向应力和剪切应力与作用在该物体上的力，包括重力、磁力等有关．若沿 x 轴和 y 轴(二维问题)方向单位体积的体力为 X 和 Y，则有

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 \text{ 和 } \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + Y = 0 \tag{8.20}$$

(见例题 8.20 和 8.21)在三维情况中也有对应的关系式，但本书不拟讨论．

在某些工程问题中，忽略固体中相隔有微小距离 dx、dy 和 dz 的两点上法向应力和剪切应力之间的变化是允许的．这是材料力学或材料强度处理问题的方法，在工程中被大量使用．然而，有些复杂的问题需要弹性理论的处理方法，此时这种变化是需要考虑的．

例　题

8.1　描述在三维固体中点的一般应力状态．

解　考虑一任意形状的固体，其承受的载荷包括数个集中的外力、分布载荷以及力偶，如图 8-6 所示．为求这些外载荷引起的内部效应，如图 8-7 所示那样用一平面截该物体并除去平面右侧部分，此时必须以合力 $\boldsymbol{F}$ 表示右侧部分对左侧的作用．然后以 $\Delta \boldsymbol{F}$ 表示作用在很小的截面积 ΔA 上的力．一般说来，$\Delta \boldsymbol{F}$ 并不与截面相垂直；所以该力可以分解成垂直于截面的 ΔF_n 和在截面内的 ΔF_τ 两个分量．若将 ΔF_n 和 ΔF_τ 的值都除以截面的面积 ΔA，可得

$$\sigma = \frac{\Delta F_n}{\Delta A} \quad \text{和} \quad \tau = \frac{\Delta F_\tau}{\Delta A},$$

上式中矢量的大小不写成黑体字．我们定义 σ 为力 $\Delta \boldsymbol{F}$ 作用点上的法向应力，而 τ 为同一点上的剪切应力．

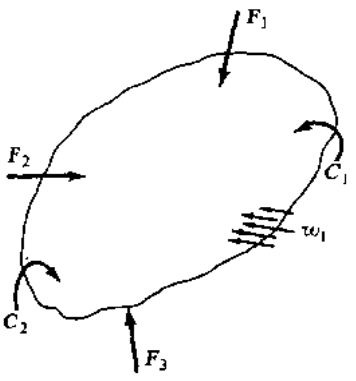


图 8-6

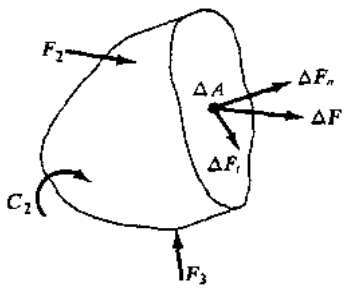


图 8-7

接下来以三对互相垂直的截面在图 8-6 所示物体上截出一个尺寸为 dx、dy 和 dz 的实心长方体微元．作用在微元体六个表面上的应力如图 8-1 所示．图上所标的方向是这些应力的正向，即通常以拉力为正，以压力为负．表示剪切应力则需要两个足标．足标中的第一个字母表示剪切应力所在平面的法向，第二个字母表剪切应力作用的方向．

图 8-1 中的每一个法向应力和剪切应力都是矢量，则矩阵

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix}$$

称为所考虑点的应力矩阵．尽管似乎在每一点上有九个独立的应力分量，但实际上独立的应力分量只有六个．为搞清事情确实如此，可以对沿图 8-1 中应力矢量 σ_y 延伸并与 x 轴平行的轴取矩(将应力乘以面积再乘以距离)并求和，得

$$+\circlearrowright \sum M_{\sigma_x} = 2\tau_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2} - 2\tau_{yz}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2} = 0$$

由此可知 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$.类似的取矩再求和可得 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$以及 $\tau_{zx}=\tau_{xz}$. 于是,在有应力存在的物体上任一点,只有六个(不是九个)独立的应力分量,即 σ_x、σ_y、σ_z、τ_{xy}、τ_{xz}和 τ_{yz}.

8.2 求一与 x、y 和 z 轴斜交的平面上的应力状态,给定的应力作用方向皆与这三轴平行.

解 设斜面(图 8-8 中的面 ABC)截出一个如图所示很小的四面体 $OABC$.(设想该四面体就是图 8-1 中矩形立方体的一角.)同时设六个应力 σ_x、σ_y、σ_z、$\tau_{xy}=\tau_{yx}$、$\tau_{zx}=\tau_{xz}$和 $\tau_{yz}=\tau_{zy}$皆已知,且在该四面体的四个三角形表面上这些应力均为常数.于是作用在每个表面上的力仅是对应的应力乘与表面面积之积.

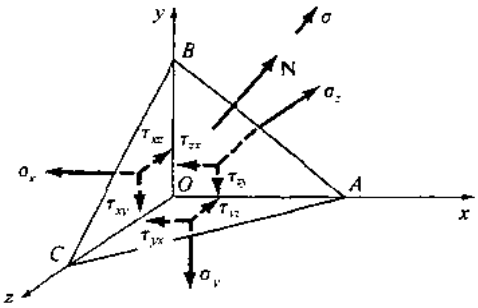


图 8-8

令矢量 $\boldsymbol{N}$ 为斜面 ABC 的法矢.该法矢由坐标原点 O 指向外.同时设 $\mathbf{N}$ 的方向余弦为 l、m 和 n;这三个值为 $\boldsymbol{N}$ 分别与 x、y 和 z 轴正向所夹之角的余弦.于是,

$$\boldsymbol{N} = l\boldsymbol{i} + m\boldsymbol{j} + n\boldsymbol{k} \tag{1}$$

式中 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$ 和 $\boldsymbol{k}$ 分别为沿 x、y 和 z 轴的单位矢量.现在以 $\mathrm{d}a$ 表示面 ABC 的面积,则面 OBC 的面积为 $l\mathrm{d}a$,面 OAC 的面积为 $m\mathrm{d}a$,面 OAB 的面积为 $n\mathrm{d}a$.最后令作用在面 ABC 上应力的 x、y 和 z 方向的分量分别为 X、Y 和 Z.

由作用在四面体上的力在 x 方向的平衡得方程

$$\sum F_x = X\mathrm{d}a - \sigma_x l\mathrm{d}a - \tau_{yx}m\mathrm{d}a - \tau_{zx}n\mathrm{d}a = 0$$

由上面的方程和相应的 y 和 z 方向的方程可得

$$\begin{aligned} X &= \sigma_x l + \tau_{xy}m + \tau_{xz}n \\ Y &= \tau_{xy}l + \sigma_y m + \tau_{yz}n \\ Z &= \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + \sigma_z n \end{aligned} \tag{2}$$

上面这三个方程完全描述了由(1)式规定了法向的斜面上的应力状态.由解析几何可知式(1)和(2)中的方向余弦有关系式

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1 \tag{3}$$

若以 σ 表示斜面 ABC 上沿矢量 $\boldsymbol{N}$ 方向的法向应力,则

$$\sigma = lX + mY + nZ \tag{4}$$

将式(2)代入式(4)得

$$\sigma = l^2\sigma_x + m^2\sigma_y + n^2\sigma_z + 2lm\tau_{xy} + 2ln\tau_{zx} + 2mn\tau_{yz} \tag{5}$$

斜面 ABC 上也有剪切应力 τ.法向应力 σ 和剪切应力 τ 的合力就是 $\sqrt{X^2+Y^2+Z^2}$,而 X、Y 和 Z 已由式(2)给出.因为 σ 和 τ 相互垂直,所以

$$\tau = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2 - \sigma^2} \tag{6}$$

8.3 在一承受载荷作用弹性体的一点上应力状态为

$$\sigma_x = 30\ \mathrm{MPa},\quad \sigma_y = -20\ \mathrm{MPa},\quad \sigma_z = 0$$

$$\tau_{xy} = 10\mathrm{MPa},\quad \tau_{xz} = 0,\quad \tau_{yz} = -15\ \mathrm{MPa}$$

求通过该点一平面上的法向应力和剪切应力,此平面法向与 x、y 和 z 轴的方向余弦分别为 0.15、0.31 和 0.939.

解 本题中 $l=0.15, m=0.31$ 和 $n=0.939$. 法向应力可由例题 8.2 中的式(5)求出:

$$\sigma = (0.15)^2(30) + (0.31)^2(-20) + 0 + 2(0.15)(0.31)(10) + 2(0.15)(0.939)(0) + 2(0.31)(0.939)(-15) = -9.05 \text{ MPa}.$$

为求剪切应力,必须利用例题 8.2 中的式(2)先求得

$$X = (30)(0.15) + (10)(0.31) + 0 = 7.6 \text{ MPa}$$
$$Y = (10)(0.15) + (-20)(0.31) + (-15)(0.939) = -18.79 \text{ MPa}$$
$$Z = 0 + (-15)(0.31) + 0 = -4.65 \text{ MPa}$$

最后,由例题 8.2 中的式(6)求得剪切应力为

$$\tau = \sqrt{(7.6)^2 + (-18.79)^2 + (-4.65)^2 - (-9.05)^2} = 18.72\text{MPa}$$

8.4 由下列三维应力状态

$$\sigma_x = 110 \text{ MPa} \quad \sigma_y = 70 \text{ MPa} \quad \sigma_z = 80 \text{ MPa}$$
$$\tau_{xy} = -50 \text{ MPa} \quad \tau_{yz} = 60 \text{ MPa} \quad \tau_{zx} = -65 \text{ MPa}$$

求其主应力和主应力方向.

解 由式(8.2)可先算出

$$I_1 = 110 + 70 + 80 = 260,$$
$$I_2 = (110)(70) + (110)(80) + (70)(80) - (-50)^2 - (60)^2 - (-65)^2 = 11\,775,$$
$$I_3 = (110)(70)(80) + 2(-50)(60)(-65) - (110)(60)^2 - (70)(-65)^2 - (80)(-50)^2 = 114\,250$$

于是式(8.1)变为

$$\sigma^3 - 260\sigma^2 + 11\,775\sigma - 114\,250 = 0 \tag{1}$$

尽管有可能以完整的形式解出该三次方程,但借助于袖珍计算器用凑试法解是最简单的. 为此,设

$$\sigma^3 - 260\sigma^2 + 11\,775\sigma - 114\,250 = R,$$

且试以 σ 的不同值代入,看是哪些值能使误差 R 为零. 经过几次凑试后,得如下结果:

σ	R
175	−656 750
190	−499 000
200	−159 200
210	+153 500

从上表最后两个值可明显看出,当 $\sigma=205$ 时可使误差非常接近零. 于是 205 便是方程(1)的一个根.

现在来求对应于 $\sigma_1=205$ MPa 应力矢量的方向余弦,若以 σ_1 的值代入式(8.3)的前两个方程并移项整理,可得

$$(205-110)l_1 - (-50)m_1 - (-65)n_1 = 0$$
$$-(-50)l_1 + (205-70)m_1 - (60)n_1 = 0$$

经简化并任设 $l_1=1$,上面两个方程变为

$$95 + 50m_1' + 65n_1' = 0$$
$$50 + 135m_1' - 60n_1' = 0$$

式中的"′"号表示这两个值是基于任设的 $l_1=1$. 由这两个方程容易解得

$$m_1' = -0.760 \quad \text{和} \quad n_1' = -0.877 \tag{2}$$

将这些值代入式(8.4)得

$$l_1^2 + (-0.760)^2 + (-0.877)^2 = 1. \tag{3}$$

当 $l_1=1$ 时,(3)式等号左侧为 $1+0.5776+0.7691=2.3467$. 然而它应该精确地等于 1,所以可知 l_1 真正的值必为

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{2.3467}} = \frac{1}{1.53} = 0.653.$$

而式(2)中的值必须类似地换算成

$$m_1 = \frac{-0.760}{1.53} = -0.497 \quad 和 \quad n_1 = \frac{0.877}{1.53} = -0.573.$$

由方向余弦的定义,很明显所有三个代数符号可以随意变换.

方程(1)余下的两个根可以用同样的凑试法解得,近似为 13 和 41. 于是三个主应力为 205 MPa、13 MPa 和 41 MPa,后两个应力的方向余弦可以用求解第一个主应力中使用的步骤求得. 求解的细节这里就省略了,因为同样的问题在例题 8.6 中可用更加有效的方法来解.

8.5 编制一 FORTRAN 程序,通过图 8-1 给出的法向应力和剪切应力求解三个主应力及其方向.

解 ☞ 求解主应力必须利用式(8.1)和(8.2). 在例题 8.4 中采用的迭代法是十分适合 FORTRAN 程序来执行的;在下面的程序中,迭代从给出的法向应力 σ_x、σ_y 和 σ_z 的最大值开始. 方向余弦的求解基本上与例题 8.4 中的步骤相同.

```
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
                 PROGRAM THREEDE (INPUT,OUTPUT)
* * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
*
*        AUTHOR: KATHLEEN DERWIN
*        DATE  : JANUARY 25,1988
*
*   BRIEF DESCRIPTION:
*     THIS PROGRAM DETERMINES THE THREE-DIMENSIONAL PRINCIPAL
*   STRESSES AND THE DIRECTION COSINES FOR A PARTICULAR STATE
*   OF NORMAL AND SHEAR STRESS.
*
*   INPUT:
*     THE USER IS PROMPTED FOR THE STATE OF STRESS AT A POINT.
*   NAMELY,THE THREE ORTHOGONAL COMPONENTS OF THE NORMAL STRESS,
*   AND THE THREE COMPONENTS OF SHEAR STRESS ARE ENTERED. (SEE
*   TEXT FOR THE COORDINATE SYSTEM AND SIGN CONVENTION FOLLOWED.)
*
*   OUTPUT:
*     THE THREE PRINCIPAL STRESSES AT THE POINT ARE PRINTED AS
*   WELL AS THE DIRECTION COSINES FOR EACH PRINCIPAL STRESS.
*
*   VARIABLES:
*     SIGX,SIGY,SIGZ      ---THE COMPONENTS OF NORMAL STRESS
*                            AT A PARTICULAR POINT.
*     TAUXY,TAUYZ,TAUXZ   ---THE COMPONENTS OF SHEARING STRESS
*                            AT A PARTICULAR POINT.
*     X1                  ---GUESS AT SMALLEST POS. ROOT TO CUBIC.
*     Y,Y1                ---VALUES OF CUBIC EQN AT EACH INCREMENT OF X1
*     DX                  ---THE SIZE OF INCREMENT IN THE ROOT SEARCH.
*     I1,I2,I3            ---CONSTANTS OF THE CUBIC STRESS EQN.
*     R1,R2,R3            ---ROOTS OF CUBIC STRESS EQUATION.
*     SIG(3)              ---THREE PRINCIPAL STRESSES(R1,R2,R3).
*     BQ,CQ               ---CONSTANTS OF THE QUADRATIC EQN.
```

```
00056 *       DISC              - - - DISCRIMINATE OF QUADRATIC EQUATION.
00058 *       L(3),M(3),N(3)    - - - DIRECTION COSINES FOR EACH PRIN. STRESS.
00060 *       A,B,C,D,E,F,G,H,K - - - TEMPORARY VARIABLES TO AID IN SOLVING
00062 *                               THE SIMULTANEOUS EQUATIONS FOR DIRECTION
00064 *                               COSINES.
00065 *
00070 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00072 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00074 *                          MAIN PROGRAM
00076 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00078 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00080 *
00082 *       VARIABLE DECLARATIONS
00084 *
00200 *       REAL SIGX,SIGY,SIGZ,TAUXY,TAUXZ,TAUYZ,I1,I2,I3A,I3B,I3C
00205         REAL I3,DX,X1,Y,Y1,R1,R2,R3,BQ,CQ,DISC
00210         REAL SIG(3),L(3),M(3),N(3),NSQRD,A,B,C,D,E,F,G,H,K
00215         INTEGER I,J
00220 *
00225 *       USER INPUT OF SHEAR AND NORMAL STRESS COMPONENTS
00230 *
00300         PRINT * ,'DETERMINATION OF 3-D PRINCIPAL STRESSES...'
00310         PRINT * ,' '
00315         PRINT * ,'ENTER THE STATE OF STRESS AT THE POINT DESIRED;'
00320         PRINT * ,'INPUT SIGX,SIGY,SIGZ:'
00325         READ * ,SIGX,SIGY,SIGZ
00330         PRINT * ,'INPUT TAUXY,TAUYZ,TAUXZ:'
00335         READ * ,TAUXY,TAUYZ,TAUXZ
00340 *
00345 *         CALCULATING THE CONSTANTS FOR THE CUBIC STRESS EQUATION
00350 *
00400         I1 =  SIGX + SIGY + SIGZ
00405         I2 = SIGX * SIGY + SIGX * SIGZ + SIGY * SIGZ - TAUXY * * 2 - TAUXZ * * 2 - TAUYZ * * 2
00410         I3A = SIGX * ((SIGY * SIGZ) - (TAUYZ * * 2))
00415         I3B = TAUXY * ((TAUXY * SIGZ) - (TAUYZ * TAUXZ))
00420         I3C = TAUXZ * ((TAUXY * TAUYZ) - (SIGY * TAUXZ))
00425         I3 = I3A - I3B + I3C
00430 *
00435 *       FINDING THE SMALLEST POSITIVE ROOT OF THE CUBIC STRESS EQUATION
00440 *
00500         DX = .005
00505         X1 = 0
00510   10 Y = (X1 * * 3) - (I1 * (X1 * * 2)) + (I2 * X1) - I3
00520         Y1 = ((X1 + DX) * * 3) - (I1 * ((X1 + DX) * * 2)) + (I2 * (X1 + DX)) - I3
00530         IF(Y.EQ.0.0) THEN
00540             R1 = X1
00550             GOTO 30
00560         ELSE
00570             IF ((Y * Y1).GT.0.0) THEN
```

```
00575                X1 = X1 + DX
00580                GOTO 10
00585              ELSE
00590                R1 = X1 + DX/2
00595                GOTO 30
00600              ENDIF
00605          ENDIF
00608 *
00610 *        NOW, SOLVING THE REMAINING QUADRATIC EQN. FOR THE OTHER TWO ROOTS
00615 *
00620   30 BQ = R1 - I1
00625          CQ = I3/R1
00630          DISC = SQRT((SQ* *2) - (4 * CQ))
00640          R2 = ( - BQ + DISC)/2
00650          R3 = ( - BQ - DISC)/2
00652 *
00655 *         ASSIGNING THE ROOTS TO THE PRINCIPAL STRESS ARRAY
00658 *
00660          SIG(1) = R2
00670          SIG(2) = R1
00680          SIG(3) = R3
00685 *
00690 *        SOLVING FOR THE DIRECTION COSINES FROM THE KNOWN SIMULTANEOUS
00692 *        EQUATION RELATIONSHIPS.
00695 *
00700          DO 50 I = 1,3
00705            A = TAUXY/(SIGY - SIG(I))
00710            B = TAUXY/(SIGX - SIG(I))
00715            C = TAUYZ/(SIGY - SIG(I))
00720            D = TAUXZ/(SIGX - SIG(I))
00725            E = ( - A/(2 * B * C)) + (1/(2 * B * D))
00730            F = (( - 1 - (A* *2))/(2 * A * B * C)) + ((1 + (B* *2))/(2 * B * D))
00735            G = ((A * D) - C)/(1 - (A * B))
00740            H = ((C* *2) - (A* *2) - (2 * A * C * D))/(2 * A * B * C)
00745            K = (1 + (D* *2))/(2 * B * D)
00760            NSQRD = E/((F * (G* *2)) + H + K)
00770            N(I) = SQRT(NSQRD)
00780            IF(G.LT. 0.0)THEN
00785              N(I) = N(I) * ( - 1)
00790            ENDIF
00795            M(I) = G * N(I)
00800            L(I) = ( - B * M(I)) + ( - D * N(I))
00805   50 CONTINUE
00810 *
00815 *           PRINTING OUTPUT
00820 *
00835          PRINT * ,'
00840          PRINT 56,'SIGX','SIGY','SIGZ','TAUXY','TAUXZ','TAUYZ'
00845          PRINT 57,SIGX,SIGY,SIGZ,TAUXY,TAUXZ,TAUYZ
```

```
00848         PRINT * ,'FOR THE STATE OF STRESS SHOWN,THE THREE PRINCIPAL'
00849         PRINT * ,'STRESSES AND THEIR DIRECTION COSINES ARE AS FOLLOWS...'
00850         PRINT 58,'NO.','SIG(I)','L(I)','M(I)','N(I)'
00860         DO 55 J = 1,3
00865           PRINT 60,J,SIG(J),L(J),M(J),N(J)
00870   55 CONTINUE
00871 *
00872 *       FORMAT STATEMENTS
00873 *
00874   56 FORMAT (/,2X,6(A5,8X))
00875   57 FORMAT (2X,3(F7.2,5X),2(F8.2,5X),F8.2,/)
00880   58 FORMAT (/,2X,A3,7X,A6,8X,3(A4,9X))
00890   60 FORMAT (2X,I2,5X,F8.2,5X,3(F8.4,5X))
00900 *
01000         END
```

8.6　采用例题 8.5 中的 FORTRAN 程序再解例题 8.4.

解　程序的提示和输入如前六行所示，输入的数据罗列于紧接在后的两行中；计算的结果在计算机输出的最后部分给出. 主应力列在标有 SIG(I)的一栏中，而对应的方向余弦列在应力右边的三栏中.

```
DETERMINATION OF 3-D PRINCIPAL STRESSES...

ENTER THE STATE OF STRESS AT THE POINT DESIRED;
INPUT SIGX,SIGY,SIGZ:
? 110,70,80
INPUT TAUXY,TAUYZ,TAUXZ:
? -50,60,-65

SIGX      SIGY      SIGZ      TAUXY     TAUXZ     TAUYZ
110.00    70.00     80.00     -50.00    -65.00    60.00
FOR THE STATE OF STRESS SHOWN,THE THREE PRINCIPAL
STRESSES AND THEIR DIRECTION COSINES ARE AS FOLLOWS...

  NO.    SIG(I)    L(I)     M(I)     N(I)
   1     205.38   -.6514    .4953    .5748
   2      13.54   -.1698    .6432   -.7467
   3      41.08    .7393    .5845    .3344
```

8.7　若在二维应力状态中已知 σ_x、σ_y 和 τ_{xy}，而 $\sigma_z=\tau_{xz}=\tau_{yz}=0$，求最大剪切应力及最大剪切应力所在平面的方向.

解　将式(8.5)代入式(8.9)得

$$\tau_{max}=\pm\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min})$$

$$=\pm\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}+\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right]\right.$$

$$-\left[\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}-\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}\right]\Bigg\}$$

$$=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2} \tag{1}$$

由式(8.7)可明显看出,剪切应力峰值所在平面与主平面成±45°角.

剪切应力峰值所在平面上也有法向应力 σ_N.利用例题 8.2 中的式(5),其中的方向余弦为与由式(8.6)算出的主方向成+45°或-45°平面的方向余弦.这些值最终求得是相等的,且

$$\sigma_N=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}, \tag{2}$$

式中 σ_x 和 σ_y 为平行于 x 和 y 轴的法向应力.

8.8 考虑一个承受如图 8-9 所示二维应力作用的微元.求其主应力及主应力方向.

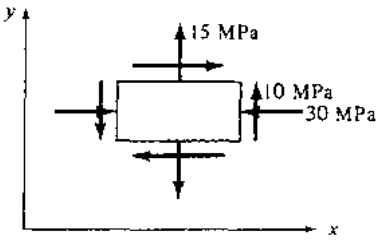


图 8-9

解 由式(8.5),其中 $\sigma_x=-30$ MPa,$\sigma_y=15$ MPa 和 $\tau_{xy}=10$ MPa,

$$\sigma=\frac{-30+15}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{-30-15}{2}\right)^2+(10)^2}=-7.50\pm24.62,$$

所以 $\sigma_1=17.12$ MPa 和 $\sigma_2=-32.12$ MPa.

主方向可由式(8.6)求得

$$\tan2\theta_p=\frac{10}{(-30-15)/2}=-0.444.$$

所以 $2\theta_p=-23.95°$ 或 156.04°,这样 $\theta_p=-11.98°$ 或 78.02°.

图 8-10 中的微元只承受主应力的作用.注意,在主平面上没有剪切应力的作用.同时也请注意,按习惯微元可以画成以主平面为边界或者在特定的讨论中以感兴趣的面为边界(如图 8-10 和图 8-11 所示).

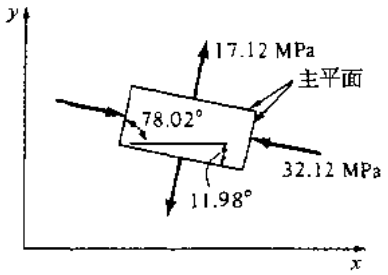


图 8-10

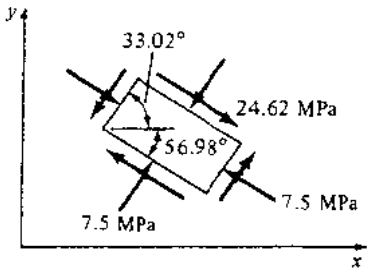


图 8-11

8.9 求例题 8.8 中微元上剪切应力峰值及其方向

解 由例题 8.7,剪切应力峰值为

$$\tau_{max}=\pm\sqrt{\left(\frac{-30-15}{2}\right)^2+(10)^2}=\pm24.62\text{ MPa}.$$

该剪切应力出现在与例题 8.8 中求得的主平面成±45°角的面上,如图 8-11 所示.

在剪切应力峰值所在平面上法向应力强度相等.如例题 8.7 中的(2)式所示,法向应力的值为 σ_x

和σ_y的平均值，或$\sigma_N=(-30+15)/2=-7.5$MPa. 法向应力的作用方向如图 8-11 所示.

8.10 编制一 BASIC 语言的计算机程序来求例题 8.7 中二维载荷的主应力及其方向.

解 主应力由式(8.5)确定，主方向由式(8.6)确定. 这些简单的表达式用在下面的程序中，计算所得的角度θ_p以度为单位.

```
00100 REM      THIS PROGRAM IS DEVELOPED TO EVALUATE THE PRINCIPAL STRESSES
00110 REM      AND THE ROTATING ANGLE IN 2-D PROBLEMS
00120 DIM      X(30),Y(30),S(30),P1(30),P2(30),T(30)
00130 REM      X,Y ARE THE NORMAL STRESSES IN THE X,Y DIRECTIONS
00140 REM      S IS THE SHEAR STRESS IN X-Y PLANE
00150 REM      P1,P2 ARE THE PRINCIPAL STRESSES
00160 REM      T IS THE ROTATING ANGLE
00170 PRINT    "PLEASE ENTER NO. OF STRESSES SET:"
00180 INPUT    N
00190 FOR      I = 1 TO N
00200 PRINT    "PLEASE ENTER THE NORMAL STRESSES IN X,Y DIRECTIONS"
00210 PRINT    "AND SHEAR STRESS:"
00220 INPUT    X(I),Y(I),S(I)
00230 LET      A = (X(I) - Y(I)) * (X(I) - Y(I))/4.0
00240 LET      B = SQR(A + S(I) * S(I))
00250 LET      C = (X(I) + Y(I))/2.0
00260 LET      P1(I) = C + B
00270 LET      P2(I) = C - B
00280 IF       X(I) = Y(I) THEN GOTO 320
00290 LET      A1 = 2.0 * S(I)/(X(I) - Y(I))
00300 LET      T(I) = 180 * ATN(A1)/6.2831852
00310 GOTO     330
00320 LET      T(I) = 45
00330 NEXT     I
00340 PRINT    "NO.","SIGXX","SIGYY","SIGXY","SIG(1)","SIG(2)","THETA"
00350 FOR      I = 1 TO N
00360 PRINT    I,X(I),Y(I),S(I),P1(I),P2(I),T(I)
00370 NEXT     I
00380 END
```

8.11 利用例题 8.10 的 BASIC 程序求例题 8.8 中微元的主应力和主方向.

解 在下面第一行提示中，程序要求输入计算所需的应力组数目(三个应力σ_x、σ_y、τ_{xy}一组). 在第二行提示中要求输入应力值. 主应力值列在 SIG(1)和 SIG(2)两栏中，角θ_p的值列于 THETA 一栏中.

```
PLEASE ENTER NO. OF STRESSES SET:
? 1
PLEASE ENTER THE NORMAL STRESSES IN X,Y DIRECTIONS
AND SHEAR STRESS:
? -30,15,10

 NO.      SIGXX    SIGYY    SIGXY     SIG(1)     SIG(2)     THETA
 1        -30      15       10        17.1221    -32.1221   -11.9812
```

上述结果与例题 8.8 所得结果一致.

8.12　考虑一组函数 $\varepsilon_x = axy, \varepsilon_y = by^3$ 和 $\gamma_{xy} = c - dy^2$，其中 a、b、c 和 d 为任意常数. 试问这一组函数能够描述弹性介质中物理上真实的平面应变状态吗?

解　任何一组特定的应变必须满足协调方程(8.15)，对于本题给出的函数，有

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = 0.$$

将上述这些值代入式(8.15)可知对所有的 x 和 y 的值协调方程均能满足. 所以给出的这组函数的确能描述物理上可能存在的应变状态.

8.13　对于图 8-2 中的面元，设 $\varepsilon_x = 200 \times 10^{-6}$，$\varepsilon_y = -110 \times 10^{-6}$ 和 $\gamma_{xy} = 100 \times 10^{-6}$. 求 $\theta = 30°$ 时 x' 方向的法向应变以及剪应变 $\gamma_{x'y'}$.

解　由式(8.10)可知沿 x' 方向的法向应变为

$$\varepsilon_{x'} = \left(\frac{200 - 110}{2} + \frac{200 + 110}{2}\cos 60° + \frac{100}{2}\sin 60°\right) \times 10^{-6}$$
$$= 165.8 \times 10^{-6}$$

由式(8.11)可得

$$\gamma_{x'y'} = [-(200 + 110)\sin 60° + 100\cos 60°] \times 10^{-6}$$
$$= -218.5 \times 10^{-6}$$

8.14　一根方钢杆边长 4 cm，长 1 m，承受 250 000 N 的轴向拉力. 求在此载荷作用下横向尺寸的减小.

解　设如图 8-12 所示的杆沿 x 轴延伸. 于是 x 方向的应力为

$$\sigma_x = \frac{250\,000\ \text{N}}{(0.04\text{m})^2} = 1.56 \times 10^8\ \text{N/m}^2 = 156\ \text{MPa} \tag{1}$$

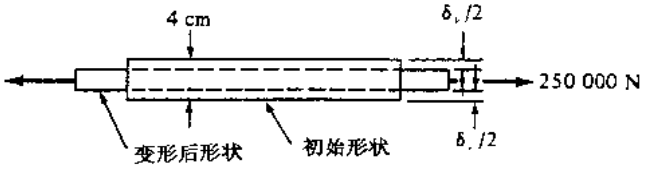


图 8-12

与很多其他金属一样，在本题这样仅一个方向载荷的作用下，钢的法向应力和法向应变关系一开始是线性的(图 8-5). 该线性关系即为

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x} = E \tag{2}$$

式中 E 是该材料的弹性模量. 对于钢材，E 通常约 $200 \times 10^9\ \text{N/m}^2$，或 200 GPa. 因为 σ_x 已由式(1)求得，故沿载荷方向的应变为

$$\varepsilon_x = \frac{1.56 \times 10^8\ \text{N/m}^2}{200 \times 10^9\ \text{N/m}^2} = 0.00078 \tag{3}$$

该应变 ε_x 伴随有如图 8-12 所示的横向收缩 δ_y 以及对应的横向法向应变. 而且，横向应变与轴向应变之比定义为泊松比 μ，如

$$\mu = \frac{\text{横向应变}}{\text{轴向应变}} = \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \tag{4}$$

对于大多数金属材料，该比值的变化范围为 0.25 至 0.35. 若取 $\mu = 0.3$，由式(3)和(4)可知

$$\varepsilon_y = \mu\varepsilon_x = (0.3)(0.00078) = 0.000234$$

因为法向应变的计算是将长度的改变除以初始长度，所以横向尺寸的缩小为

$$\delta_y = (\varepsilon_y)(40\ \text{mm}) = 0.00936\ \text{mm}$$

在垂直于图 8-12 纸面的方向上杆边长的收缩是相等的.

8.15　考虑一个承受单轴拉力作用的长方体微元(图 8-13). 推导一近似表达式计算由该载荷

引起的每单位体积的体积变化.

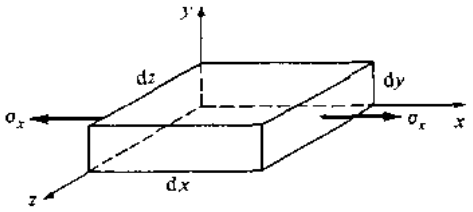


图 8-13

解 ☞ 载荷方向的应变记为 ε_x. 在另外两个与之正交方向的应变每个都是 $-\mu\varepsilon_x$. 于是,若微元的初始尺寸为 dx,dy 和 dz,则最终的尺寸为

$$(1+\varepsilon_x)dx \quad (1-\mu\varepsilon_x)dy \quad (1-\mu\varepsilon_x)dz$$

且变形后的体积为

$$\begin{aligned} V' &= [(1+\varepsilon_x)dx][(1-\mu\varepsilon_x)dy][(1-\mu\varepsilon_x)dz] \\ &= (1+\varepsilon_x)(1-2\mu\varepsilon_x)dxdydz \\ &= (1-2\mu\varepsilon_x+\varepsilon_x)dxdydz \end{aligned}$$

因为变形很小,故应变的二次方和乘积均可忽略不计.

因为初始体积为 $dxdydz$,所以每单位体积的体积变化为

$$\Delta V/V = (1-2\mu)\varepsilon_x$$

由此可知,在拉力作用下体积略有增加,在压力作用下体积略有减小.

同样,在与作用力方向相垂直的平面内微元体横截面积近似等于 $A=(1-\mu\varepsilon_x)^2dydz=(1-2\mu\varepsilon_x)\times dydz$.

8.16 一根方铝杆宽 2 in,长 10 in,在杆的两端作用有轴向拉力. 由实验确定载荷方向上应变为 0.001 in/in. 求当载荷作用在杆上时杆的体积. 取 $\mu=0.33$.

解 ☞ 由例题 8.15 可知每单位体积的体积变化为

$$\Delta V/V = \varepsilon_x(1-2\mu) = 0.001(1-0.66) = 0.00034$$

于是整根杆体积的变化为 $\Delta V=2(2)(10)(0.00034)=0.0136\text{in}^3$.

杆在无应变状态时初始的体积为 40 in^3. 因为拉力使体积增大,故在受载时最终的体积为 40.0136 in^3. 采用激光光束的现代测量技术其测量精度已达到本题的要求.

8.17 应变测量经常采用电阻应变片,其结构主要是粘结在应变材料上的细电阻丝. 一种在市场上出售的应变片有三根两两交成 60°角的电阻丝,如图 8-14 所示. 若 $\varepsilon_0=220\times10^{-6}$,$\varepsilon_{60}=120\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_{120}=-180\times10^{-6}$,求主应力及其方向. 受载材料为钢材,其弹性模量 $E=200$ GPa,$\mu=0.3$.

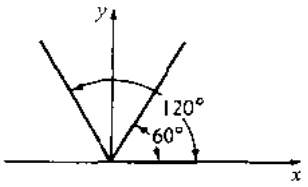


图 8-14

解 ☞ 利用式(8.10),该式给出了与 x 轴成 θ 角方向的法向应变. 在每一个测量应变的方向上,

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_x = 220\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_{60} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos120^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin120^\circ = 120\times10^{-6}$$

$$\varepsilon_{120} = \frac{\varepsilon_x+\varepsilon_y}{2} + \frac{\varepsilon_x-\varepsilon_y}{2}\cos240^\circ + \frac{\gamma_{xy}}{2}\sin240^\circ = -180\times10^{-6}$$

上述三个方程含有三个未知数 ε_x、ε_y 和 γ_{xy}. 直接解之,得

$$\varepsilon_x = 220\times10^{-6} \quad \varepsilon_y = -113\times10^{-6} \quad \gamma_{xy} = 346\times10^{-6}$$

利用式(8.12)可求得主应变:

$$\varepsilon_{1,2}=\left[\frac{220-113}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{220+113}{2}\right)^2+\left(\frac{346}{2}\right)^2}\right]\times10^{-6}$$

即 $\varepsilon_1=293.5\times10^{-6}$ 和 $\varepsilon_2=-186.5\times10^{-6}$.

胡克定律的二维形式(8.17)为

$$\sigma_1=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_1+\mu\varepsilon_2)\quad\sigma_2=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_2+\mu\varepsilon_1)$$

若现在将主应变代入上述关系式,得主应力

$$\sigma_1=\frac{200\times10^9}{1-(0.3)^2}[293.5\times10^{-6}+(0.3)(-186.5\times10^{-6})]=52.1\ \text{MPa}$$

$$\sigma_2=\frac{200\times10^9}{1-(0.3)^2}[-186.5\times10^{-6}+(0.3)(293.5\times10^{-6})]=-21.6\ \text{MPa}$$

主应力的方向由式(8.13)给出:

$$\tan2\theta_p=\frac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_x-\varepsilon_y}=\frac{346}{220+113}=1.039$$

故 $2\theta_p=46.09°$,$\theta_p=23.05°$和 $113.05°$.

8.18 一实心钢球是深潜系统的一部分.钢球直径 200 mm 并承受 50 MPa 的流体静压作用,$E=210$ GPa,$\mu=0.3$.求在此压力作用下钢球体积的缩小.

解 利用式(8.19)求体积模量

$$K=\frac{E}{3(1-2\mu)}=\frac{210\times10^9\text{N/m}^2}{3(1-0.6)}=175\times10^9\text{N/m}^2$$

仍由式(8.19),每单位体积的体积变化为

$$e=-P/K=-\frac{50\times10^6\text{N/m}^2}{175\times10^9\text{N/m}^2}=-0.2857\times10^{-3}$$

在受载前球的体积为 $\frac{4}{3}\pi(0.1\text{ m})^3=0.004189\text{ m}^3$.于是整个球的体积变化为

$$\Delta V=(-0.2857\times10^{-3})(0.004189\text{ m}^3)=1.196\times10^{-6}\text{m}^3$$
$$=1196\text{ mm}^3$$

8.19 一微元处于这样一种应力状态:在 x 方向有应力 σ_x,在 z 方向横向收缩是不受限制的,但在 y 方向横向收缩完全被限制.求:x 方向上应力与应变之比以及 z 方向应变与 x 方向应变之比.

解 首先来仔细考虑胡克定律的一般形式(8.16).若在方程组中令 $\sigma_z=0$ 和 $\varepsilon_y=0$(为了满足本题的条件),则有

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu\sigma_y)\quad\varepsilon_y=\frac{1}{E}(\sigma_y-\mu\sigma_x)=0\quad\varepsilon_z=\frac{1}{E}[-\mu(\sigma_x+\sigma_y)].$$

由上述方程式中的第二式可知

$$\sigma_y=\mu\sigma_x.$$

将这一关系式代入第一式,得

$$\varepsilon_x=\frac{1}{E}(\sigma_x-\mu^2\sigma_x)=\frac{1-\mu^2}{E}\sigma_x.$$

解这一方程,将 σ_x 表示成 ε_x 的函数再代入上面第三个方程,得

$$\varepsilon_z=-\frac{\mu}{E}(\sigma_x+\mu\sigma_x)=-\frac{\mu(1+\mu)}{E}\frac{\varepsilon_xE}{1-\mu^2}=-\frac{\mu\varepsilon_x}{1-\mu}$$

现在所求的比值就唾手可得了

$$\frac{\sigma_x}{\varepsilon_x}=\frac{E}{1-\mu^2}\quad\text{和}\quad-\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x}=\frac{\mu}{1-\mu}$$

上面第一式中的 $\frac{E}{1-\mu^2}$ 通常称为有效弹性模量,在薄板和薄壳理论中有用;第二个比值 $\frac{\mu}{1-\mu}$ 称为泊松比的有效值.

8.20 求二维平衡方程(8.20)的一种类型解,该解也满足协调方程(8.15).

解 先假设平衡方程(8.20)中的体力 X 和 Y 可以忽略不计,这样式(8.20)就变成

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = 0 \tag{1}$$

胡克定律(8.16)的二维形式为

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \tag{2}$$

现在引入函数 $\Phi(x,y)$,即艾里应力函数.该函数由下面三个方程定义:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \tag{3}$$

很容易看出式(3)中的应力满足平衡方程(1).

接下来若将式(3)代入式(2)并将得到的应变表达式再代入协调方程(8.15),得

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial y^4} = 0 \tag{4}$$

∇^4 称为双调和算子,定义为

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \tag{5}$$

而∇^2 称为拉普拉斯算子,定义为

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \tag{6}$$

于是,式(4)变为

$$\nabla^4 \Phi = 0 \tag{7}$$

上面最后一个方程就是本题的简明表达形式.任何满足式(7)的解 $\Phi(x,y)$也自动满足微元的平衡方程和协调方程.解既可以利用复变函数技巧也可以用凑试法求得其解.

如多项式

$$\Phi_2 = A_2 x^2 + B_2 xy + C_2 y^2 \tag{8}$$

很容易证明满足式(7),且 A_2、B_2 和 C_2 可以是任意值.多项式

$$\Phi_3 = A_3 x^3 + B_3 x^2 y + C_3 x y^2 + D_3 y^3 \tag{9}$$

也很容易证明满足式(7),且 A_3、B_3、C_3 和 D_3 可以是任意值.另一方面,多项式

$$\Phi_4 = A_4 x^4 + B_4 x^3 y + C_4 x^2 y^2 + D_4 x y^3 + E_4 y^4 \tag{10}$$

仅当 $E_4 = -A_4 - \frac{1}{6}C_4$ 时满足式(7).许多工程问题可以应用式(8)、(9)和(10)得到解决,这一点在后面的章节中可以看到.

8.21 应力函数 $\Phi = Bx^3y^2$ 能用来描述在体力为零的情况中平面应力状态吗?

解 我们需要确定给定的函数是否满足例题 8.20 中的式(7).利用双调和算子,得

$$\begin{aligned}\nabla^4(Bx^3y^2) &= \frac{\partial^4}{\partial x^4}(Bx^3y^2) + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}(Bx^3y^2) + \frac{\partial^4}{\partial y^4}(Bx^3y^2) \\ &= 0 + 24Bx + 0\end{aligned}$$

因为$\nabla^4\Phi$ 并非对所有 x 和 y 的值都为零,故式(7)未被满足,从而 $\Phi = Bx^3y^2$ 不能用来描述平面应力状态.

补 充 习 题

8.22 一受载弹性体中一点的应力为

$$\sigma_x = -40\ \text{MPa}, \quad \sigma_y = 100\ \text{MPa}, \quad \sigma_z = 30\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = 30\ \text{MPa}, \quad \tau_{xz} = -15\ \text{MPa}, \quad \tau_{yz} = 25\ \text{MPa}$$

求通过该点某平面上的法向应力和剪切应力,该平面的法向相对于 x、y 和 z 轴的方向余弦分别为 $l_1 = 0.5$, $m_1 = 0.25$ 和 $n_1 = 0.829$.

答案:$\sigma = 23.1$ MPa;$\tau = 65.8$ MPa

8.23 对于某三维应力状态,其中

$$\sigma_x = -18\ \text{MPa}, \quad \sigma_y = -30\ \text{MPa}, \quad \sigma_z = 12\ \text{MPa}$$

$$\tau_{xy} = 7\ \text{MPa}, \quad \tau_{yz} = 11\ \text{MPa}, \quad \tau_{zx} = -3\ \text{MPa}$$

用解析方法求主应力和主应力方向.

答案:

$$\sigma_1 = -15\ \text{MPa}, l_1 = 0.92,\quad m_1 = 0.39, n_1 = -0.05$$
$$\sigma_2 = 15\ \text{MPa}, l_2 = -0.04,\quad m_2 = 0.23, n_2 = 0.97$$
$$\sigma_3 = -36\ \text{MPa}, l_3 = -0.39,\quad m_3 = 0.89, n_3 = 0.23$$

8.24 采用例题 8.5 中的 FORTRAN 程序求一微元的主应力及其方向,该微元上分布有下面的三维应力状态:

$$\sigma_x = -60\ \text{MPa},\quad \sigma_y = 50\ \text{MPa},\quad \sigma_z = -30\ \text{MPa}$$
$$\tau_{xy} = -35\ \text{MPa},\quad \tau_{yz} = 110\ \text{MPa},\quad \tau_{zx} = 70\ \text{MPa}$$

答案:

```
DETERMINATION OF 3-D PRINCIPAL STRESSES...

ENTER THE STATE OF STRESS AT THE POINT DESIRED;
INPUT SIGX,SIGY,SIGZ:
? -60,50,-30
INPUT TAUXY,TAUYZ,TAUXZ:
? -35,110,70

  SIGX    SIGY    SIGZ    TAUXY    TAUXZ    TAUYZ
-60.00   50.00  -30.00   -35.00    70.00   110.00
FOR THE STATE OF STRESS SHOWN,THE THREE PRINCIPAL
STIRESSES AND THEIR DIRECTION COSINES ARE AS FOLLOWS...
```

NO.	SIG(I)	C(I)	M(I)	N(I)
1	-3.27	-.7996	.3999	-.4481
2	127.86	.0706	.8034	.5912
3	-164.60	.5964	.4410	-.6707

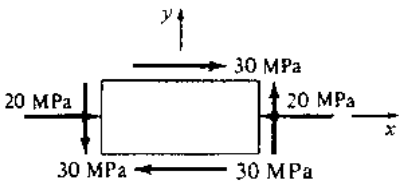


图 8-15

8.25 物体中一平面微元承受如图 8-15 所示的应力.用解析方法求:(a)主应力及其方向;(b)最大剪切应力以及其所在平面的方向.

答案:(a)$\sigma_{max} = 21.6$ MPa,角 144°13′,$\sigma_{min} = -41.6$ MPa,角 54°13′;(b)$\tau_{max} = 31.6$ MPa,角 9°13′

8.26 对 8.25 题中的微元,求与 x 轴斜交成 30°平面上的法向应力和剪切应力.

答案:$\sigma = -30$ MPa;$\tau = -24.4$ MPa

8.27 一微元承受的应力为 $\sigma_x = 8000\ \text{lb/in}^2$ 和 $\sigma_y = 8000\ \text{lb/in}^2$.用解析方法求该面元上存在的最大剪切应力.

答案:0

8.28 一平面微元承受的应力如图 8-16 所示.用解析方法求:(a)主应力及其方向;(b)最大剪切应力及其所在平面的方向.

答案:(a)$\sigma_{max} = 181$ MPa,角 121°45′,$\sigma_{min} = 69$ MPa,角 31°45′;(b)$\tau_{max} = 56$ MPa,角 76°45′

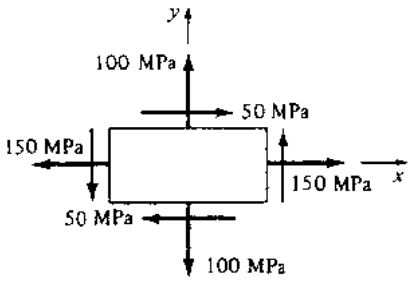


图 8-16

8.29 一平面微元承受的应力如图 8-17 所示.用解析方法求:(a)主应力及其方向;(b)最大剪切应力及其所在平面的方向.

答案:$\sigma_{max} = 200\ \text{lb/in}^2$ 角 50°40′,$\sigma_{min} = -20\ 200\ \text{lb/in}^2$

角 140°40′；(b) $\tau_{max}=10\ 200\ lb/in^2$ 角 5°40′

8.30 利用例题8.10的BASIC程序求图8-18所示微元的主应力及其方向.

答案：SIG(1)＝58 027.8；SIG(2)＝21 972.2；THETA＝－28.155

8.31 利用例题8.10编制的BASIC程序求图8-19所示平面微元的主应力及其方向.

答案：SIG(1)＝114.34；SIG(2)＝－74.3398；THETA＝－16.0027

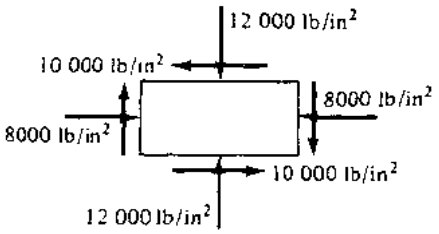


图 8-17

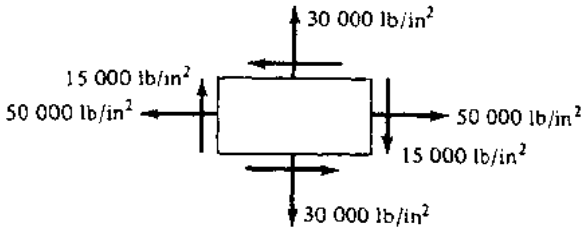


图 8-18

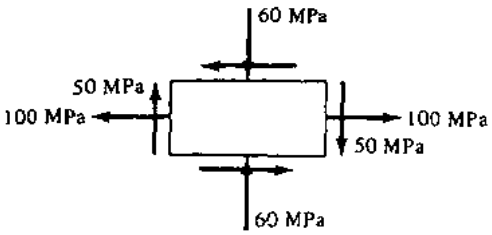


图 8-19

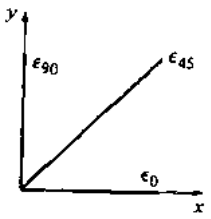


图 8-20

8.32 一电阻应变片由三根两两交成45°的电阻丝构成，如图8-20所示.它测出的应变如下：$\varepsilon_0=175\times10^{-6}$，$\varepsilon_{45}=-100\times10^{-6}$和$\varepsilon_{90}=125\times10^{-6}$.受载材料是铝合金，其$E=12\times10^6\ lb/in^2$，$\mu=0.3$.求主应力及其方向.

答案：4890 lb/in² 和 250 lb/in²；－42.15°和47.86°

8.33 一平面微元测出在 x 方向的应变为 -150×10^{-6}，y 方向应变为 100×10^{-6}，对应的剪应变为 40×10^{-6}.求与 x 轴成30°角方向上的法向应变.

答案：-70.2×10^{-6}

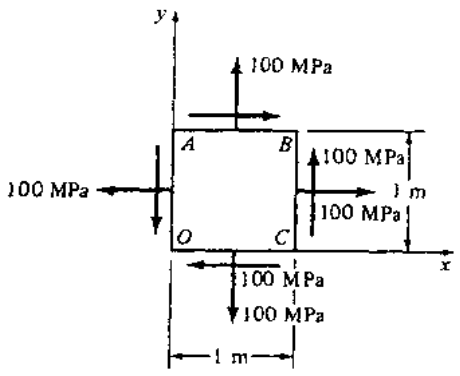


图 8-21

8.34 一块正方形铝板承受如图 8-21 所示的双轴向载荷. 这种材料的 $E = 75$ GPa, $\mu = 0.3$. 求在载荷作用下对角线 OB 长度的变化.

答案: 2.259 mm

8.35 一块薄钢板厚 1 cm, 其他尺寸如图 8-22 所示. 在 x 方向钢板受有 900 kN 力的作用, 而在板的中心刻了一个直径为 0.1 m 的圆. 求在载荷作用下沿 y 方向该圆直径的变化.

答案: −0.045 mm

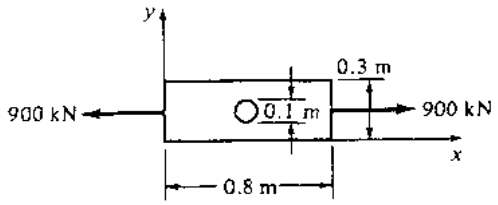


图 8-22

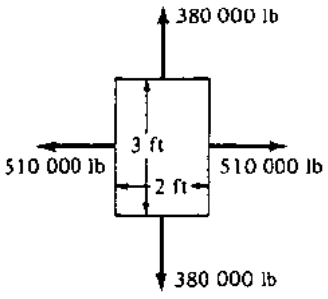


图 8-23

8.36 一块矩形钢板长 2 ft, 宽 3 ft, 厚 0.4 in, 承受如图 8-23 所示双轴向载荷作用. 该材料 $E = 30 \times 10^6$ lb/in^2, $\mu = 0.3$. 求在载荷作用下钢板厚度的变化.

答案: −0.0003 in

8.37 一实心的铝正圆柱体承受 300 lb/in^2, 流体静压的作用. 圆柱体半径 2 in, 高 10 in. 铝的 $E = 10 \times 10^6$ lb/in^2, $\mu = 0.3$. 求在此压力作用下圆柱体体积的变化.

答案: −0.045 in^3

8.38 考虑一微元, 其某一方向上作用有应力 σ_x, 而在另外两个方向上的横向收缩则完全被限制. 求有效弹性模量和泊松比的有效值.

答案: $E_{\text{eff}} = \dfrac{E(1-\mu)}{(1-2\mu)(1+\mu)}$; $\mu_{\text{eff}} = 0$

8.39 一根杆承受轴向压力作用. 横向膨胀受限制只能达到在横向表面上不受载荷时正常膨胀的一半. 求其有效弹性模量.

答案: $E_{\text{eff}} = \dfrac{E(1-\mu)}{1-\mu-\mu^2}$

8.40 一根恒截面杆承受轴向拉力作用并在受力方向产生应变为1/800. 求每单位体积的体积变化. 设 $\mu = 1/3$.

答案: 1/2400 (体积增大)

8.41 函数 $\Phi = Ax^2y$ 可用来描述体力为零情况中的平面应力状态吗?

答案: 可以

8.42 函数 $\Phi = Ax^4y$ 可用来描述体力为零情况中的平面应力状态吗?

答案: 不行

8.43 函数

$$\Phi_5 = A_5x^5 + B_5x^4y + C_5x^3y^2 + D_5x^2y^3 + E_5xy^4 + F_5y^5$$

可用来描述体力为零情况中的平面应力状态吗?

答案: 在 $E_5 = -5A_5 - C_5$, $F_5 = -\dfrac{1}{5}(B_5 + D_5)$ 的特殊情况中是可以的

8.44 考虑函数 $\epsilon_x = 4y^3$, $\epsilon_y = 3x^2y$ 和 $\gamma_{xy} = -3x^2y^2$. 这一组函数能用来描述一承受二维载荷作用物体物理上可能成立的应变状态吗?

答案: 不能

第九章　均匀拉力、压力和剪切力

均匀拉力或压力

若在例题 8.20 的式(8)中设 $A_2 = B_2 = 0$,则该方程变为 $\Phi_2 - c_2 y^2$. 现在若将例题8.20中的式(3)应用于 Φ_2,可得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 2c_2 = \text{常数} \qquad \sigma_y = \tau_{xy} = 0$$

于是,当载荷落在应力-应变曲线的线性段范围内时(上述方程组也正适用于这一范围),应力函数 Φ_2 描述了处于 x 轴位置并承受均匀拉力或压力作用杆的应力状态. 这是例题 8.1 所讨论情况的一个特例,其中只有 σ_x 不为零.

轴向载荷作用下的恒截面杆

对于一根长为 L 截面积为 A 的恒截面杆,其弹性模量为 E,载荷 $\boldsymbol{P}$ 沿杆的轴向并通过其横截面的形心,则由载荷引起杆的长度变化 Δ 为

$$\Delta = \frac{PL}{AE}$$

其中 $P = |\boldsymbol{P}|$. 若杆承受拉力,其长度增加 Δ. 若杆承受压力,其长度减少同样的量. (见例题 9.1至 9.3)

轴向载荷作用下的变截面杆

若受载杆沿长度方向截面有变化,如图 9-1(a)所示,则用计算机求解其长度的变化是比较方便的. 如果杆的形状是如图 9-1(b)所示的平板,或是整杆有如图 9-1(c)所示的圆截面,则长度的变化很容易由例题 9.4 的 FORTRAN 程序求得. (同时见例题 9.5)

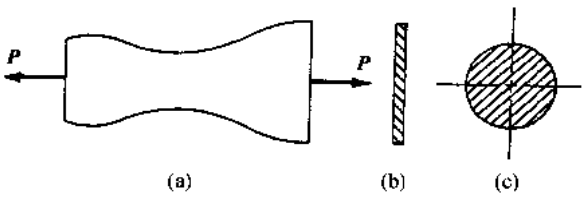


图 9-1

静力学方程

本书前面已经讨论了静力学方程,用它处于平衡状态的单根杆或杆系. 无论杆的材料是否处于弹性范围内,这些方程都是成立的.

形变几何学

本章讨论许多由杆件铰接成的系统,这些系统只在铰接点或者说节点上承受外载荷,我们假设,在这样的载荷引起的形变中,杆系的初始几何形状(整体上看)并无显著的变化,每一根杆可能会拉伸或收缩,另外也可能会绕其两个铰接点中的某一个像刚体那样转动. 然而任何杆不出现弯曲并且只产生小的法向应变. 这些应变引起位移,而这种位移是作用载荷的线性函数. 所有的位移与杆的某些特征尺寸(如杆的长度)相比都很小. (见例题 9.6.)

当然也有例外的情况，在那样的系统中每根杆的行为像线弹性元件那样，而整个系统经历的形变与作用的载荷成非线性关系.这种系统的特点是在加载过程中初始的几何形状发生显著变化.例题 9.7 就讨论这样一个例子.

对每个在节点处承受载荷的杆系，节点处位移的协调性必须要强制性满足.(见例题 9.9)

热效应

在一铰接杆系中部分或全部杆件可能要承受温度的变化(假设每一根杆沿长度方向温度是一致的).这种温度变化会引发杆内力的作用和杆的位移，因为通常整个杆系或部分杆件是被外界物体约束住的.作用在杆系上的机械效应和热效应二者都须加以考虑，并且节点处的协调性必须强制满足.

加工误差和安装误差

偶然，加工出来的杆件会意外地比设计规定的长度稍长些或短些.即使这类加工误差十分小，也会在施加外载荷或温度变化之前引起显著的初始(预)应力.(见例题 9.16)

静定力系

若作用于物体上所有外力的值都能单独由静平衡方程确定，则该力系就是外静定的.进一步说，若所有的杆力都能单独由静力学确定，则该系统是内静定的.一个系统可以是外静定的，然而是内静不定的.(见例题 9.9 和 9.10)

静不定力系

许多情况中作用于物体上的外力不能单独由静力学方程确定，因为未知数的数目多于平衡方程个数.于是该系统是外静不定的.解这一类问题不仅要利用静力学方程，也要利用节点处协调变形的方程，将这些方程合在一起联立求解.(见例题 9.11 至 9.15)

均匀剪切应力

在例题 8.20 的式(8)中若令 $A_2=C_2=0$，则该方程变为 $\Phi_2=B_2xy$.对于落在剪切力弹性范围内的载荷，上述条件对应于在杆的横截而上剪切应力为恒值.实际上在所有承受作用力和(或)热效应的机械系统中都存在剪切应力.现代复合材料中作用在细细的增强纤维上的剪切应力过大时，会导致纤维从环氧化物基体上剥离从而使系统突然失稳.(见例题 9.18 和 9.19)

最终强度分析(极限设计)

假设在此讨论的材料应力-应变曲线形状如图 9-2 所示，即具有类似于结构钢那样极强的延展性.这意味着这种材料产生的应力不会超过屈服点的应力.

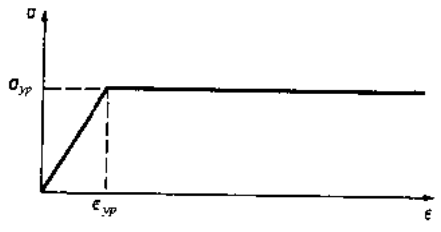


图 9-2

在一个静不定系统中，任何非弹性行为都会改变约束条件.在改变了的条件下，系统所能承受的载荷往往会超过以完全弹性行为为依据所预测的载荷.在一种应用于静不定结构称为极限设计的设计方法中，先确定最终载荷，在这种载荷作用下结构的一部分或整体达到屈服点并造成系统“失稳”，然后将最终载荷除以某个安全系数来确定安全的工作载荷.(作为该方法的应用，见例题 9.20 和 9.21)

例　题

弹性分析：均匀法向应力

9.1　拉伸载荷 $\boldsymbol{P}$ 作用于长为 L、恒截面且截面积为 A 的直杆两端，杆的弹性模量为 E. 求证由该载荷引起杆的总伸长为 $\Delta = PL/AE$.

证明 ☞　问题的已知条件如图 9-3 所示. 由例题 8.20 的式(8)令 $A_2 = B_2 = 0$，由该题的式(3)得

$$\Phi_2 = C_2 y^2 \quad 和 \quad \sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 2C_2$$

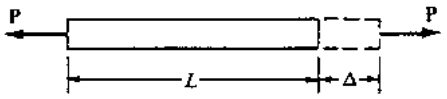


图 9-3

于是轴向应力为 $2C_2$，该应力在整个杆上是恒值. 由定义，法向应力应为 $\mathbf{P}/A$ 故 $\sigma_x = 2C_2 = \mathbf{P}/A$.

而由例题 8.20 的式(2)可知，x 方向的应变为

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) = \frac{1}{E}\left(\frac{\mathbf{P}}{A} - 0\right) = \frac{\mathbf{P}}{AE}$$

因为该应变不依赖于 x，且沿长度 L 应变是恒定的. 而应变的定义是每单位长度的长度变化，所以整个长度 L 的变化为 $\Delta = PL/AE$.

9.2　一根无重杆长 7 m，左端 A 固结于墙上如图 9-4 所示. 该杆在 B、C 和 D 点受图示的载荷. 杆的横截面恒定且截面积为 10 cm^2，杆材是钢材，其 $E = 200$ GPa，求由载荷引起的杆总长的变化.

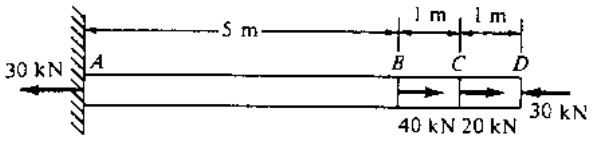


图 9-4

解 ☞　杆上三个区域每一个都处于平衡状态. 画 AB 段的分离体图时要注意，作用在该段内任何截面两侧的合力是 30 kN 的拉力. 在 BC 段，任何截面两侧的合力是 10 kN 的压力.（在左侧是 $30 - 40 = -10$ kN，在右侧是 $20 - 30 = -10$ kN.）在 CD 段，每一截面上作用有 30 kN 的压力. 于是这三段杆的分离体图就如图 9-5 所示.

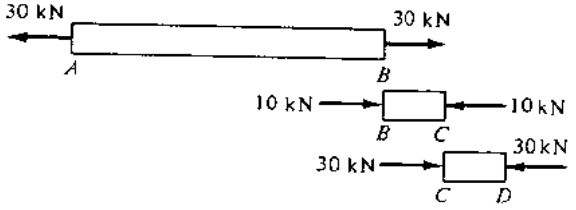


图 9-5

在每一段杆上，长度的变化都是 PL/AE，其中 P 为作用于该段的轴向力（拉力或压力）的大小. 于是对整根杆有

$$\Delta = \frac{(30\,000\ \text{N})(5\ \text{m})}{AE} + \frac{(-10\,000\ \text{N})(1\ \text{m})}{AE} + \frac{(-30\,000\ \text{N})(1\ \text{m})}{AE}$$

$$= \frac{110\,000\ \text{N}\cdot\text{m}}{(10\ \text{cm}^2)\left(\frac{1\ \text{m}}{100\ \text{cm}}\right)^2(200\times10^9\text{N/m}^2)}$$

$$= 5.5\times10^{-4}\text{m} = 0.55\ \text{mm}$$

9.3　现代复合材料往往是用直径极小的细丝增强的环氧化物. 氧化铝是一种通常采用增强材料，它在细丝状态时 $E=350\times10^6\ \text{lb/in}^2$，且拉伸(断裂)强度为 $4\times10^6\text{lb/in}^2$. 对于直径为 0.001 in 和长 0.5 in 的纤维，求对应于法向应力为 $3\times10^6\ \text{lb/in}^2$ 时的轴向载荷以及在该载荷作用下纤维的伸长.

解　由定义，$\sigma=P/A$. 所以有

$$P = \sigma A = (3\times10^6\ \text{lb/in}^2)(\pi/4)(0.001\ \text{in})^2 = 2.356\ \text{lb}$$

该轴向载荷产生的伸长为

$$\Delta = \frac{PL}{AE} = \frac{(2.356\ \text{lb})(0.5\ \text{in})}{(\pi/4)(0.001\ \text{in})^2(350\times10^6\text{lb/in}^2)}$$

$$= 0.0043\ \text{in}$$

9.4　考虑一根变截面弹性杆，在杆的两端受拉伸或压缩载荷如图 9-1 所示. 沿杆的长度方向横截面的变化可以用解析式表达，或者沿杆的轴向选取几个位置测量而得知. 编制一个 FORTRAN 程序在下列两种情况下求解由载荷引起的杆的长度变化：(a)有均匀厚度 t 的平板形杆(图 9-1(b))；(b)杆的每一个横截面都是圆(图 9-1(c)).

解　公式 $\Delta=PL/AE$ 不能用于杆的全长 L，因为该式是在恒截面杆条件下推导出来的. 然而我们可以将整根杆截成很多段. 在每一小段上杆的横截面可认为是恒定的. 若图 9-1 中杆的轮廓线方程为 $y=f(x)$，我们可以将杆分成无限小的微段，每一段长为 dx，面且在每一段上横截面是恒定的，然后对所有的微段应用公式 $\Delta=PL/AE$ 再利用积分方法把各段上的结果加起来. 若杆是由有限数量的小段组成且每一段的尺寸是可以测量的，我们可以运用这些测量来求解各段的伸长(或收缩)，再将所有段上的结果加起来.

这一思路体现在下面的 FORTRAN 程序中. 该程序可应用于上述(a)和(b)两种情况下任何不规则截面且承受轴向拉力或压力的杆. 通常拉伸载荷视为正值，故正的轴向变形为伸长而负的轴向变形为缩短.

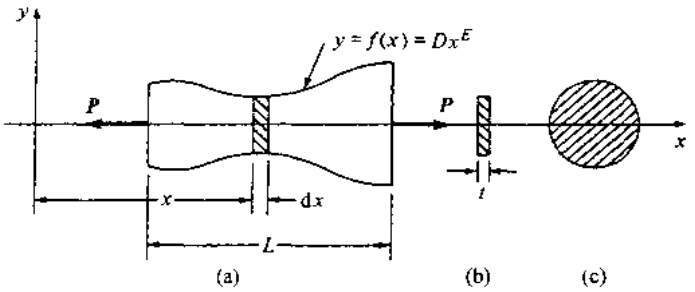


图 9-6

程序中涉及到的变量如图 9-6 所示. 注意，在描述杆的轮廓线的方程 $y=Dx^E$ 中 E 是指数并非弹性模量. 而且设杆相对其纵轴是对称的. 若轮廓线是由一组测量值给定的，则这些测点必须沿杆等间隔分布.

```
00100 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00110                          PROGRAM SLBTEN1(INPUT,OUTPUT)
00120 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00130 *
```

```
00140 *          AUTHOR:KATHLEEN DERWIN
00150 *          DATE  :JANUARY 15,1988
00160 *
00170 *   BRIEF DESCRIPTION:
00180 *     THIS PROGRAM DETERMINES THE CHANGE OF LENGTH OF A BAR DUE
00190 *   TO AXIAL TENSION OR COMPRESSION. THE BAR MAY BE A CONSTANT
00200 *   THICKNESS,VARIABLE WIDTH RECTANGULAR SLAB,OR A SOLID CIRCULAR
00210 *   ROD WITH VARIABLE DIAMETER. IN EITHER CASE THE SHAFT IS CENTRALLY
00220 *   LOADED BY AN AXIAL FORCE.
00230 *     THE VARYING WIDTH (OF THE SLAB) OR DIAMETER (OF THE ROD) MAY
00240 *   BE DESCRIBED EITHER ANALYTICALLY AS Y = D* (X** E) WHERE X IS THE
00250 *   GEOMETRIC AXIS OF THE BAR,OR NUMERICALLY USING THE MAGNITUDE OF
00260 *   Y AT EACH END OF N SEGMENTS,MEANING N + 1 VALUES.
00270 *
00280 *   INPUT:
00290 *     THE USER IS PROMPTED FOR THE TOTAL BAR LENGTH, THE ELASTIC
00300 *   MODULUS,AND THE AXIAL LOAD. THE USER IS THEN ASKED IF THE
00310 *   BAR IS BOUNDED BY A KNOWN FUNCTION,AS WELL AS THE SHAPE OF ITS
00320 *   X - SECTION. FOR THE CASE OF THE SLAB,THE UNIFORM THICKNESS IS
00330 *   ALSO ASKED FOR . . . IF THE FUNCTION IS KNOWN,THE CONSTANTS ARE
00340 *   THEN PROMPTED AND THE ENDPOINTS OF THE BAR ON THE X-AXIS INPUTTED;
00350 *   ALTERNATELY,THE NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS
00360 *   MUST BE ENTERED.
00370 *
00380 *   OUTPUT:
00390 *     THE TOTAL ELONGATION OF THE BAR IS DETERMINED AND PRINTED.
00400 *
00410 *   VARIABLES:
00420 *     L,T,EM     - - - LENGTH,THICKNESS,ELASTIC MODULUS OF BAR
00430 *     D,E        - - - CONSTANTS OF Y = D* (X** E) GOVERNING BAR BOUNDARY
00440 *     X0,XN      - - - ENDPOINTS OF SHAFT ON X - AXIS
00450 *     P          - - - CENTRALLY APPLIED AXIAL LOAD
00460 *     A(100)     - - - INDIVIDUAL SEGMENT HEIGHTS/DIAMETERS
00470 *     AREA       - - - X - SECTIONAL AREA OF EACH SMALL INCREMENT
00480 *     ANS        - - - DETERMINE IF USER HAS A KNOWN FUNCTION
00490 *     TYPE       - - - DETERMINE BAR X - SECTION
00500 *     DELTA      - - - UNIFORM BAR ELONGATION
00510 *     LEN        - - - LENGTH OF INCREMENTAL ELEMENT
00520 *
00530 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00540 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00550 *                                MAIN PROGRAM
00560 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00570 * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * * *
00580 *
00590 *   VARIABLE DECLARATION
00600 *
00610   REAL I,T,L,EM,D,E,X0,XN,P,DELTA,A(100),AREA,LEN
00620   INTEGER ANS,TYPE,NUM,J
```

```
00630 *
00640 *        USER INPUT PROMPTS
00650 *
00660   PRINT * , ' ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE BAR (IN M OR INCHES): '
00670   READ * ,L
00680   PRINT * , ' ENTER THE ELASTIC MODULUS (IN PASCALS OR PSI): '
00690   READ * .EM
00700   PRINT * , ' ENTER THE UNIFORM AXIAL LOAD (IN NEWTONS OR LBS):'
00710   READ * .P
00720   PRINT * , ' PLEASE DENOTE THE BAR X - SECTIONAL SHAPE:'
00730   PRINT * , ' ENTER 1 - - SLAB;2 - - CIRCULAR ROD'
00740   READ * ,TYPE
00750 *
00760 *        IF A SLAB,PROMPT FOR ITS THICKNESS
00770 *
00780   IF (TYPE. EQ. 1)THEN
00790     PRINT * , ' ENTER THE THICKNESS OF THE SLAB (IN M OR INCHES):'
00800     READ * ,T
00810   ENDIF
00820   PRINT * , ' DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE BAR? '
00830   PRINT * , ' ENTER 1 - - YES;2 - - NO '
00840   READ * ,ANS
00850 *
00860 *        IF ANS EQUALS ONE,THE USER KNOWS FUNCTION. PROMPT
00870 *        FOR CONSTANTS AND ENDPOINTS.
00880 *
00890   IF (ANS. EQ. 1) THEN
00900     PRINT * , ' F(X) = D * (X * * E) '
00910     PRINT * , ' ENTER D,E:'
00920     READ * ,D,E
00930     PRINT * , ' ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE BAR: '
00940     PRINT * , '(IN M OR INCHES): '
00950     READ * ,X0,XN
00960 *
00970   AREA = 0
00980   L = XN - X0
00990   LEN = L/50
01000   DO 20 I = X0,XN,LEN
01010     Y1 = (D * (I * * E)) * 2
01020     Y2 = (D * ((I + LEN) * * E)) * 2
01030     Y = (Y1 + Y2)/2
01040     IF(TYPE. EQ. 1) THEN
01050       AREA = 1/(Y * T) + AREA
01060     ELSE
01070       AREA = 4/(3. 14159 * (Y * * 2)) + AREA
01080     ENDIF
01090 20 CONTINUE
01100 *
01110 *        IF ANS EQUALS TWO,THE USER DOES NOT KNOW FUNCTION.
```

```
01120 *        PROMPT FOR NUMBER OF SEGMENTS AND MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS.
01130 *
01140   ELSE
01150     PRINT * , ' ENTER THE NUMBER OF SECTIONS TO BE CALCULATED: '
01160     READ * ,NUM
01170     IF(TYPE.EQ.1) THEN
01180       PRINT * , ' ENTER THE HEIGHTS OF THE ENDS FOR SECTIONS 1 TO N: '
01190       PRINT * ,' (IN M OR INCHES): '
01200     ELSE
01210       PRINT * ,'ENTER THE DIAMETERS OF THE ENDS FOR SECTIONS I TO N: '
01220       PRINT * ,' (IN M OR INCHES): '
01230     ENDIF
01240 *
01250 *        INPUT MEASURED HEIGHTS/DIAMETERS
01260 *
01270     DO 30 J = 1,NUM + 1
01280       READ * ,A(J)
01290 30   CONTINUE
01300 *
01310       AREA = 0
01320       LEN = L/NUM
01330       DO 40 J = 1,NUM + 1
01340         Y = (A(J) + A(J + 1))/2
01350         IF(TYPE.EQ.1)THEN
01360           AREA =  1/(Y * T) + AREA
01370         ELSE
01380           AREA = 4/(3.14159 * (Y * * 2)) + AREA
01390       ENDIF
01400 40   CONTINUE
01410   ENDIF
01420 *
01430 *          DETERMINING THE ELONGATION OF THE LOADED BAR
01440 *
01450     DELTA = (P * LEN * AREA)/EM
01460 *
01470     PRINT 50,DELTA
01480 *
01490 50 FORMAT(2X,' THE DEFORMATION OF THE BAR IS : ',F8.5,' (M OR IN.) '
01500 *
01510     STOP
01520     END
```

9.5　一根平板形杆具有厚度为 15 mm 的矩形横截面，从 $x=1$ m 至 $x=1.5$ m 杆的轮廓线为 $y=0.1\ x^{1/2}$，如图 9-7 所示. 平板承受 1800 kN 的拉伸载荷且 $E=110$ GPa. 利用例题 9.4 的 FORTRAN 程序求此载荷引起的伸长.

解　需要输入到该程序的数据为：厚度 $t=0.015$ m，1 m 和 1.5 m 两处端点的坐标，载荷 1800 kN，弹性模量 110×10^9 N/m^2 以及描述杆轮廓线方程中的参数 D=0.1 和 E=0.5. 计算机的运行如下，其中包括对一些提示的问答：

```
ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE BAR (IN M OR INCHES):
? 0.5
ENTER THE ELASTIC MODULUS(IN PASCALS OR PSI):
? 110E+9
ENTER THE UNIFORM AXIAL LOAD (IN NEWTONS OR LBS):
? 1800 E+3
PLEASE DENOTE THE BAR X-SECTIONAL SHAPE:
ENTER 1--SLAB;2--CIRCULAR ROD
? 1
ENTEN THE THICKNESS OF THE SLAB(IN M OR INCHES):
? 0.015
DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE BAR?
ENTER 1--YES;2--NO
? 1
F(X)=D*(X**E)
ENTER D,E:
? 0.1,0.5
ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE BAR:
(IN M OR INCHES):
? 1,1.5
THE DEFORMATION OF THE BAR IS :.00250(M O RIN.)
```

于是杆的伸长为 2.5 mm.

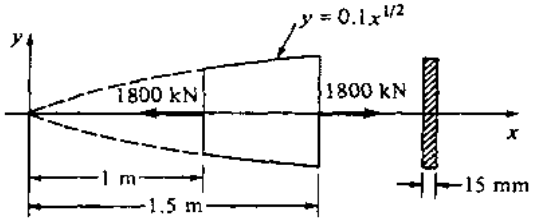


图 9-7

9.6　图 9-8 中的杆 AB 和 BC 铰接于它们的端点 B 并在该点承受一 25 000 lb 的垂直载荷. 两根杆皆为钢杆，$E=30\times10^6$ lb/in^2. 求 B 点位移的水平分量和垂直分量.

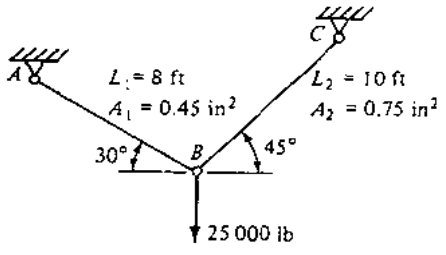


图 9-8

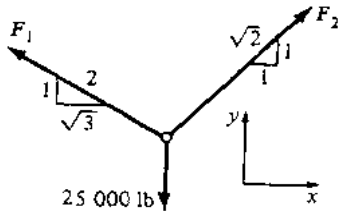


图 9-9

解　以 F_1 和 F_2 表示杆力(图 9-9)，则有

$$\sum F_x=\frac{1}{\sqrt{2}}F_2-\frac{\sqrt{3}}{2}F_1=0$$

$$\sum F_y=\frac{1}{2}F_1+\frac{1}{\sqrt{2}}F_2-25\,000=0$$

由上面两式可求得 $F_1=18\,300$ lb 和 $F_2=22\,400$ lb. 对应的应力为

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{18\,300}{0.45} = 40\,700 \text{ lb/in}^2, \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{22\,400}{0.75} = 29\,900 \text{ lb/in}^2.$$

上述应力对大多数钢材来说完全在弹性极限之内.(所以必须要在计算变形之前求解应力以确保系统的行为是在弹性范围之内.)

现在可以来考虑变形了.若两杆在 B 端不铰接(脱开),则由于拉力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的作用它们各自的伸长量为

$$\Delta_1 = \frac{F_1 L_1}{A_1 E} = \frac{(18300 \text{ lb})(96 \text{ in})}{(0.45 \text{ in}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)} = 0.1301 \text{ in}$$

和

$$\Delta_2 = \frac{F_2 L_2}{A_2 E} = \frac{(22400 \text{ lb})(120 \text{ in})}{(0.75 \text{ in}^2)(30 \times 10^6 \text{ lb/in}^2)} = 0.1196 \text{ in}$$

如图 9-10 所示,脱开的杆 AB 将会伸长,直到 B 点到达 P 点为止.然后杆 AB 将会像一刚体绕 A 铰转动,而 P 点则沿与 AB 相垂直的直线 ef 移动.同样,脱开的杆 CB 将会伸长,直到 B 点到达 R 点.然后杆 CB 将会绕 C 铰转动,而 R 点则沿与 CB 相垂直的直线 gh 移动.(实际上,这两杆像刚体转动时其端点是沿圆弧在移动,但对很小的转动而言,圆弧可以近似地看成直线 ef 和 gh.)这两条直线相交于 B' 点,而该点正是 B 点最终所在的正确位置.

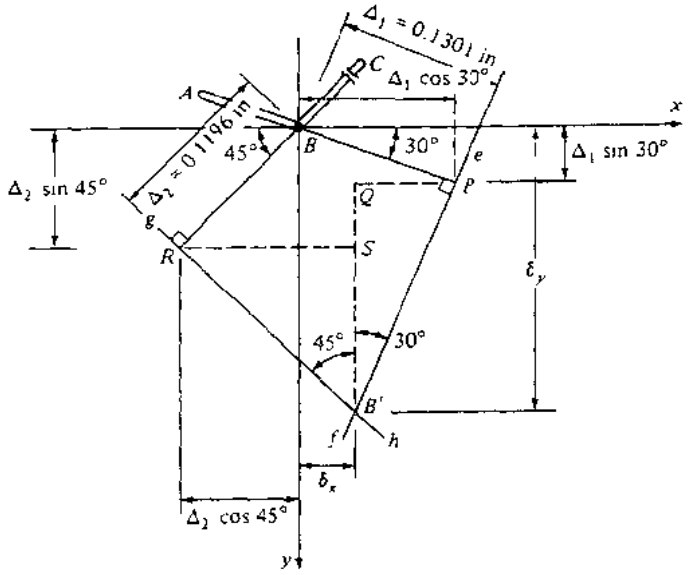


图 9-10

由变形图上的几何关系(引入辅助三角形 $B'PQ$ 和 $B'RS$)有如下关系式:

$$\tan 30^\circ = \frac{\Delta_1 \cos 30^\circ - \delta_x}{\delta_y - \Delta_1 \sin 30^\circ}$$

$$\tan 45^\circ = \frac{\delta_y - \Delta_2 \sin 45^\circ}{\Delta_2 \cos 45^\circ + \delta_x}$$

因为 Δ_1 和 Δ_2 已经求得,这两个方程可以解出未知的 δ_x 和 δ_y.这一结果就是所求的位移 $\delta_x = 0.034$in 和 $\delta_y = 0.202$ in.

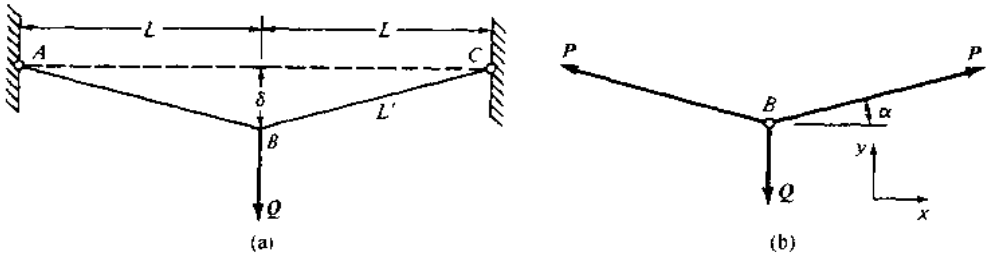


图 9-11

9.7　图 9-11(a)中的两根细杆铰接于 A、B 和 C 且在没有载荷作用时处于初始的水平位置. 杆的自重可以忽略不计. 现在若在 B 点(逐渐)施加一力 Q. 求当在 B 点产生规定的垂直偏离 δ 时所需力 Q 的大小.

解　在本题的系统中每一根杆件的伸长都满足胡克定律,然而由于几何上的约束偏离大小并不与力成正比,每一根杆服从关系式 $\Delta = PL/AE$. 每一根杆初始长度都是 L,在全部载荷 Q 施加后长度都是 L'. 于是

$$L' - L = \frac{PL}{AE} \tag{1}$$

B 铰的分离体图如图 9-11(b)所示. 由平衡可知

$$\sum F_y = 2P\sin\alpha - Q = 0 \quad 或 \quad Q = 2P\frac{\delta}{L'}$$

将上式的 P 由式(1)置换,得

$$Q = 2\frac{(L'-L)AE}{L}\frac{\delta}{L'} = \frac{2\delta AE}{L}\left(1 - \frac{L}{L'}\right) \tag{2}$$

但

$$(L')^2 = L^2 + \delta^2 \tag{3}$$

故

$$Q = \frac{2\delta AE}{L}\left(1 - \frac{L}{\sqrt{L^2+\delta^2}}\right) \tag{4}$$

而由二项式定理有

$$\sqrt{L^2+\delta^2} = L\left(1+\frac{\delta^2}{L^2}\right)^{1/2} = L\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2} + \cdots\right) \tag{5}$$

所以

$$1 - \frac{L}{L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2}\right)} \approx 1 - \left(1 - \frac{\delta^2}{2L^2}\right) = \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{L^2} \tag{6}$$

由此可以得到力与位移之间的如下关系式:

$$Q \approx \frac{2AE\delta}{L}\frac{\delta^2}{2L^2} = \frac{AE\delta^3}{L^3} \tag{7}$$

所以位移 δ 并不是与力 Q 成正比,即使对每一根杆来说胡克定律都是成立的. 当 δ 增大时(假设杆此时的伸长依然服从胡克定律),Q 与 δ 越接近正比关系. 而且在本例中叠加关系不成立. 该系统的一个特点是外力的作用明显受到所出现的小变形的影响. 所以应力和位移都不是作用载荷的线性函数,并且叠加原理也不适用.

9.8　金门大桥的中心墩距长为 4200 ft,由系在几何条件如图 9-12 所示桥塔的钢缆所支撑. 桥塔由另外的钢缆与地面拉紧固定. 作为近似处理,设桥塔在水平方向没有变形,也就是说是刚性的. 求:当温度升高 40°F(华氏)时,钢缆中点出现的垂直位移. 这一位移对应于桥面中点向下的垂直位移. 缆绳是钢的,$E = 30\times10^6 \text{lb/in}^2$,热膨胀系数 $\alpha = 6.5\times10^{-6}(°\text{F})^{-1}$. 垂直支撑钢缆的伸长忽略不计.

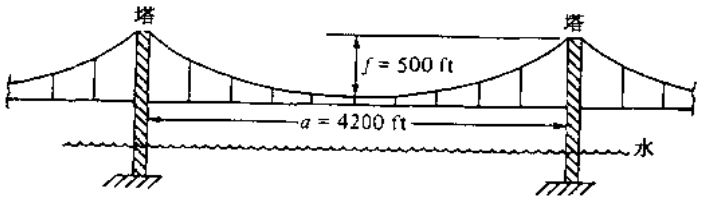


图 9-12

解　悬挂缆绳所成的弧线可合理地近似成一条抛物线. 缆绳的长度沿弧线度量近似等于[①]

$$L = a\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{f}{a}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{f}{a}\right)^4\right] \tag{1}$$

① 参阅 W. G. Mclean 和 E. W. Nelson 所著"工程力学"第四版,薛奥姆大纲丛书(纽约:McGraw-Hill 公司,1988)

式中 f 是缆绳中心的下垂距离，而 a 是墩距. 所以在温度变化之前缆绳的长度为

$$L_0 = 4200\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{500}{4200}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{500}{4200}\right)^4\right] = 4353.3336 \text{ ft}$$

40 °F的温升使缆绳伸长

$$\Delta L_0 = (4353.33 \text{ ft})[6.5 \times 10^{-6}(°\text{F})^{-1}](40°\text{F}) = 1.1319 \text{ ft}$$

在温度变化之后，现在再应用式(1)，求缆绳中心的下垂距离 f_1：

$$L_0 + \Delta L_0 = 4354.46 = 4200\left[1 + \frac{8}{3}\left(\frac{f_1}{4200}\right)^2 - \frac{32}{5}\left(\frac{f_1}{4200}\right)^4\right]$$

由上式可得四次方程式

$$\frac{32}{5}\left(\frac{f_1}{4200}\right)^4 - \frac{8}{3}\left(\frac{f_1}{4200}\right)^2 + 0.0367775 = 0$$

该方程可以借助计算器用凑试法解出 $f_1 = 502.28$ ft. 于是，由于温度上升而引起的垂直位移为 $502.28 - 500 = 2.28$ ft.

9.9　图 9-13 中的刚性杆由两条缆索 AB 和 CD 水平悬挂. 在 0.5 kN 的载荷挂到杆上之前缆索中无初始应力. 求载荷悬挂的位置 x 以及杆仍然保持水平位置时每根缆索上的力. 杆和缆索的自重忽略不计.

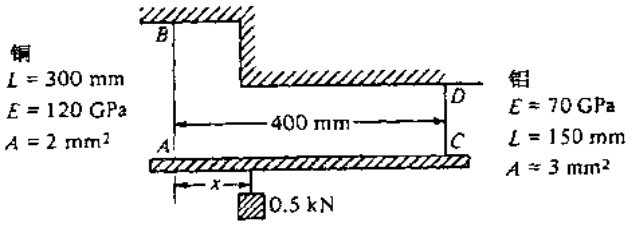


图 9-13

解　☞ 设 P_{Cu} 和 P_{Al} 为 0.5 kN 的载荷作用之后铜缆索和铝缆索中力的大小. 由静平衡有(图 9-14)

$$\sum F_y = P_{Cu} + P_{Al} - 500 \text{ N} = 0$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = -P_{Al}(0.4) + (500 \text{ N})x = 0$$

因为杆仍然保持水平位置，故两根缆索的伸长必相等. 利用公式 $\Delta = PL/AE$，有

$$\frac{P_{Cu}(0.3 \text{ m})}{(2 \text{ mm}^2)\left(\frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}}\right)^2(120 \times 10^9 \text{ N/m}^2)} = \frac{P_{Al}(0.15 \text{ m})}{(3\text{mm}^2)\left(\frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}}\right)^2(70 \times 10^9 \text{N/m}^2)}$$

上面的方程与两个平衡方程联立求解，得

$$x = 0.254 \text{ m}, \quad P_{Cu} = 182 \text{ N}, \quad P_{Al} = 318 \text{ N}$$

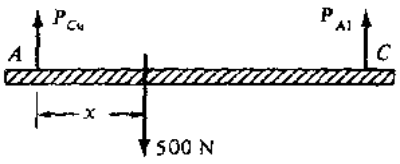


图 9-14

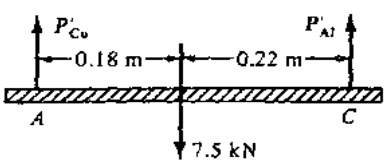


图 9-15

9.10　假设例题 9.9 中的刚性杆现在在离 A 点 0.18 m 处承受 7.5 kN 垂直向下力的作用. 求杆中点的垂直位移.

解　☞ 若设 P'_{Cu} 和 P'_{Al} 为缆索中的轴向力大小，则杆的分离体图如图 9-15 所示. 于是由静力平衡可写出

$$+\circlearrowleft \sum M_A = (0.18 \text{ m})(7.5 \text{ kN}) - (0.4 \text{ m})P'_{Al} = 0$$

解得 $P'_{Al}=3.375$ kN;同样可解得 $P'_{Cu}=4.125$ kN.

由于上述轴向力的作用而引起铜索和铝索的伸长分别为

$$\Delta_{Cu}=\frac{(4125\ \text{N})(0.3\ \text{m})}{(2\ \text{mm}^2)\left(\frac{1\ \text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right)^2(120\times10^9\ \text{N/m}^2)}=5.156\times10^{-3}\text{m}\ 或\ 5.156\ \text{mm}$$

$$\Delta_{Al}=\frac{(3375\ \text{N})(0.15\ \text{m})}{(3\ \text{mm}^2)\left(\frac{1\ \text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right)^2(70\times10^9\ \text{N/m}^2)}=2.411\times10^{-3}\ \text{m}\ 或\ 2.411\ \text{mm}$$

由于两根缆索的伸长不相等,刚性杆 AC 必定绕某个位置未知的点作了转动.在图 9-16 中,杆 AC 的初始水平位置用实线表示,最终的位置用虚线表示.而杆绕其转动的点 F 离 C 点的距离为 d (未知).由几何关系有

$$\frac{2.411}{d}=\frac{5.156}{0.4+d}\ 或 d=0.351\ \text{m}$$

利用相似三角形关系同样可以求得杆 AC 中点的垂直位移:

$$\frac{\Delta_1}{0.2+0.351}=\frac{2.411}{0.351}\ 或\ \Delta_1=3.78\ \text{mm}$$

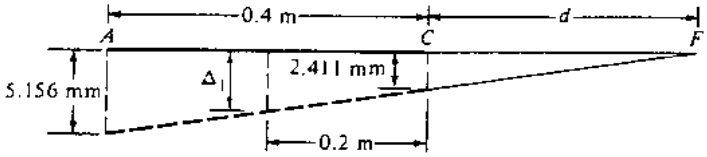


图 9-16

9.11　图 9-17(a)中的复合杆在两端与支撑面固接.杆的左半段是铜的,长 12 in,恒截面积为 12 in^2.右半段是铝的,长 8 in,恒截面积 3 in^2.在温度为 80 °F(华氏)时整个杆内无应力.然而系统的温度下降造成右侧支撑面在杆的轴向出现 0.001 in 的收缩.求最低温度在该温度下杆内出现的应力在铝质段不超过 24 000 lb/in^2.铜的 $E=16\times10^6\ \text{lb/in}^2$, $\alpha=9.3\times10^{-6}(°\text{F})^{-1}$;铝的 $E=10\times10^6\text{lb/in}^2$, $\alpha=12.8\times10^{-6}(°\text{F})^{-1}$.

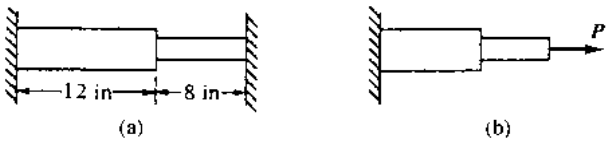


图 9-17

解　最简单的解法也许是将右侧支撑墙左面的杆截下来,于是当温度下降 ΔT 时杆能自由收缩.这样,整个复合杆缩短的长度为

$$(9.3\times10^{-6})(12)\Delta T+(12.8\times10^{-6})(8)\Delta T\ \text{in} \tag{1}$$

我们必须还要考虑右侧支撑墙的作用.假设墙对杆施加一轴向力 $\boldsymbol{P}$,如图 9-17(b)所示.由于平衡,不论是铜质段还是铝质段的任何截面上作用的合力必定等于 $\boldsymbol{P}$.力 $\boldsymbol{P}$ 的作用使复合杆伸展的长度为

$$\frac{P(12)}{12(16\times10^6)}+\frac{P(8)}{3(10\times10^6)}\text{in}$$

若右侧支撑面是不可压缩的,则上式将与式(1)相等.但右侧支撑面收缩了0.001 in,所以

$$\frac{P(12)}{12(16\times10^6)}+\frac{P(8)}{3(10\times10^6)}=(9.3\times10^{-6})(12)\Delta T+(12.8\times10^{-6})(8)\Delta T-0.001 \tag{2}$$

铝质段中的应力不能超过 24 000 lb/in^2;而 $\sigma=P/A$,故可能承受的最大的力为 $P=A\sigma=3(24\ 000)$

=72 000 lb. 将此值置换(2)式中的 P，可解得 $\Delta T = 115$ °F. 于是温度允许从初始的 80 °F 下降 115 °F，最终达到 −35 °F.

9.12　图 9-18 中的圆截面钢杆长 1.2 m，截面积 15 cm^2，左端与一不可移动的墙固接. 右端的墙可以左右稍稍移动，并且在 500 MN 力的作用下将水平移动 1 m. 也就是说墙的"弹性常数"为 500 MN/m. 求当杆的温度上升 55℃ 时杆内的应力. 取 $E = 200$ GPa，$\alpha = 12.5\times10^{-6}(℃)^{-1}$.

解　首先将右端的约束墙暂时除去. 于是杆就能自由膨胀，比如说，由于温度上升 ΔT 而延伸到图 9-19 的 AB' 位置. 该自由膨胀的长度为 $\Delta = \alpha L\Delta T$.

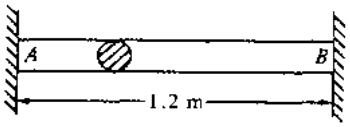


图 9-18

然而杆右端最终真正的位置是 B''，该点并非一定在 B 点和 B' 点的中间，因为墙的弹性力 $\boldsymbol{F}$ 会将杆的右端向左推. 于是杆被压缩的长度为 $\Delta_2 = FL/AE$.

因为右侧的墙起始位置是 B 然后移动到 B''，它向右移动的距离为 Δ_1，这可以看作是由于墙的 "弹性"而造成的收缩. 对于任何线性弹力，总有 $F = kx$ 或 $\Delta_1 = F/k$.

由几何关系，我们知道 $\Delta_1 + \Delta_2 = \Delta$，或

$$\frac{F}{k} + \frac{FL}{AE} = \alpha L\Delta T \tag{1}$$

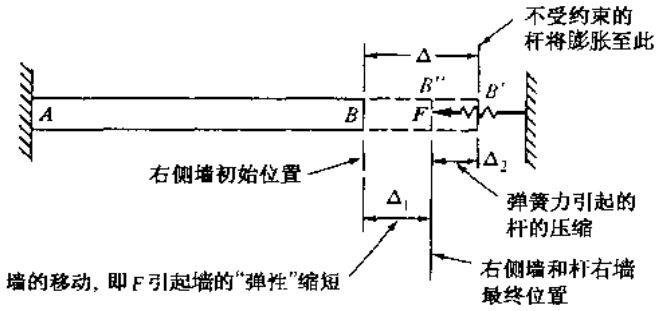


图 9-19

用已知条件置换式(1)，得

$$\frac{F}{500\times10^6\text{N/m}} + \frac{F(1.2\text{m})}{\left[(15\text{ cm}^2)\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)^2\right](200\times10^9\text{N/m}^2)}$$

$$= [12.5\times10^{-6}(℃)^{-1}](1.2\text{ m})(55℃) \tag{2}$$

解式(2)得 $F = 137\,500$ N. 所以轴向应力为

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{137\,500}{15\text{ cm}^2\left(\frac{1\text{ m}}{100\text{ cm}}\right)^2} = 91.7\text{ MPa}$$

如果右侧的墙也像左侧一样不可移动，则其"弹性系数"为无限大，这样，式(1)和(2)中等号左侧的第一项就没有了.

9.13　图 9-20 中的刚性杆 AD 在 A 端铰接且如图所示与杆 BC 和 ED 连接. 整个系统初始时无应力且所有杆的自重皆可忽略不计. BC 杆的温度下降 50 °F，而 ED 杆的温度上升 50 °F. 忽略任何可能的横向弯曲，求 BC 杆和 ED 杆中的法向应力. BC 杆是黄铜的，其 $E = 14\times10^6\text{lb/in}^2$，$\alpha = 10.4\times10^{-6}(°F)^{-1}$；$ED$ 杆是钢的，其 $E = 30\times10^6\text{lb/in}^2$，$\alpha = 6.5\times10^{-6}(°F)^{-1}$. BC 杆的截面积为 1 in^2；ED 杆的截面积为 0.5 in^2.

解　如图 9-21 的分离体图所示，令作用在 AD 杆上的力为 $\boldsymbol{P}_{st}$ 和 $\boldsymbol{P}_{br}$，因为 AD 杆会像刚体那样绕 A 点转动(如图中虚线所示)，所以有关系式 $\Delta_{br}/10 = \Delta_{st}/25$，式中 Δ_{br} 和 Δ_{st} 分别是 BC 杆的轴向收缩和 DE 杆的轴向延伸.

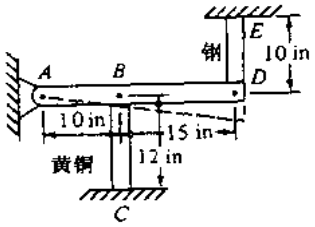


图 9-20

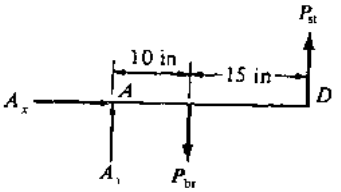


图 9-21

BC 杆总的长度变化由两部分组成：一是温度下降引起杆的收缩；二是由轴向力 $\boldsymbol{P}_{br}$ 引起的拉伸. DE 杆总的长度变化也由两部分组成：一是温度升高引起杆的伸长；二是力 $\boldsymbol{P}_{st}$ 引起杆的拉伸. 所以有

$$\frac{2}{5}\left[(6.5\times10^{-6})(10)(50)+\frac{P_{st}(10)}{0.5(30\times10^{6})}\right]$$

$$=-(10.4\times10^{-6})(12)(50)+\frac{P_{br}(12)}{1(14\times10^{6})}$$

或

$$0.856\,P_{br}-0.267\,P_{st}=7750 \tag{1}$$

由平衡

$$+\circlearrowright\sum M_A=10P_{br}-25P_{st}=0 \tag{2}$$

联立式(1)和(2)求解得 $P_{st}=4030$ lb 和 $P_{br}=10\,100$ lb. 于是对每根杆运用 $\sigma=P/A$，得 $\sigma_{st}=8060$ lb/in^2 和 $\sigma_{br}=10\,100$ lb/in^2.

9.14 杆 AB 和 BC 截面积均为 $A_1=5$ cm^2，杆 AE 和 CE 截面积均为 $A_2=7$ cm^2. 四根杆同时支撑一个刚性曲线拱板，在板的中心有 15 kN 的垂直载荷，如图 9-22 所示. 系统的所有连接点均为铰接. 求每根杆内的应力.

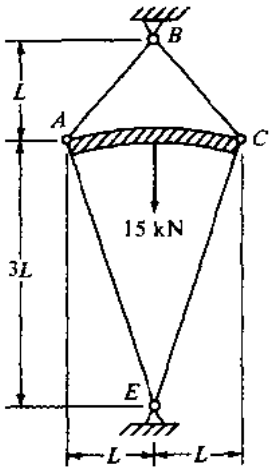


图 9-22

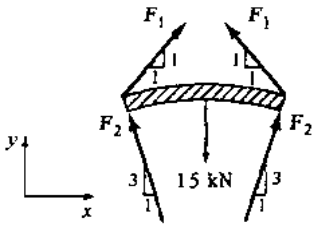


图 9-23

解 ☞ 很明显，上面两根杆受拉而下面两根杆受压. 于是刚性拱板 AC 的分离体图如图 9-23 所示. 由垂直方向的平衡，有

$$\sum F_y=2F_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2F_2\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)-15=0 \tag{1}$$

上面一个方程中含有两个未知数，故必须补充一个方程，而该补充方程来自系统的变形. 考虑到系统的对称性，可知 A 点和 C 点的位移是相等的，而且都必定是垂直向下. 设 A 点最终的位置为 A' 点.

杆 AB 和 AE 的变形在图 9-24 和图 9-25 中进行分析. 在图 9-24 中我们在 A 点将杆 AB 脱开，这样它就能自由延伸一段长度 Δ_1，然后它像刚体那样绕 B 点转动. A 端最终的位置为 A'，此时其垂

直位移为 ΔA，如图所示.这样就有

$$由\ \Delta = PL/AE,\quad \Delta_1 = \frac{F_1(L\sqrt{2})}{A_1E}\ 和\ \Delta A = \sqrt{2}\Delta_1 = \frac{2F_1L}{A_1E} \tag{2}$$

同样的，当将杆 AE 脱开时，它先会缩短一长度 Δ_2 然后绕 E 铰像刚体那样转动，A 端最终到达 A' 点（图 9-25）.对杆 AE 有

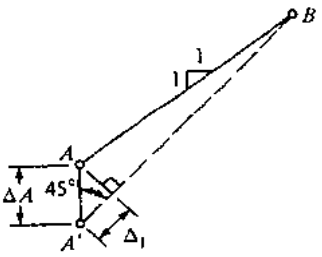


图 9-24

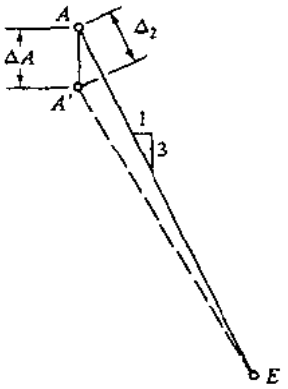


图 9-25

$$\Delta_2 = \frac{F_2(L\sqrt{10})}{A_2E}\ 和\ \Delta A = \frac{\sqrt{10}}{3}\Delta_2 = \frac{10F_2L}{3A_2E} \tag{3}$$

使(2)式和(3)式中的 ΔA 表达式相等，得

$$F_1 = \frac{5}{3}\frac{A_1}{A_2}F_2 \tag{4}$$

将(4)式代入(1)式，得

$$F_2 = \frac{15}{\dfrac{10}{3\sqrt{2}}\dfrac{A_1}{A_2} + \dfrac{6}{\sqrt{10}}}$$

因为 $A_1 = 5\ \text{cm}^2$，$A_2 = 7\ \text{cm}^2$，所以 $F_2 = 4.188\ \text{kN}$ 以及 $F_1 = 4.986\ \text{kN}$.由此可知 AB 杆和 AE 杆中的应力

$$\sigma_1 = \frac{F_1}{A_1} = \frac{4.986\ \text{kN}}{5\ \text{cm}^2} = 9.97\ \text{MPa},\quad \sigma_2 = \frac{F_2}{A_2} = \frac{4.188\ \text{kN}}{7\ \text{cm}^2} = 5.98\ \text{MPa}$$

由于对称性，BC 杆和 CE 杆中的应力也分别等于 σ_1 和 σ_2.

9.15 一中空的钢圆柱围在一实心的铜圆柱外面，如图 9-26(a)所示，整个装置承受50 000 lb 的轴向载荷作用.空心钢圆柱的截面积为 3in^2，实心铜圆柱的截面积为 $10\ \text{in}^2$.在载荷作用之前两个圆柱的高度是一样的.欲使全部的载荷都作用在实心铜圆柱上，求整个装置所需要的温升.在装置顶上的盖板是刚性的.钢的 $E = 16\times10^6\ \text{lb/in}^2$，$\alpha = 9.3\times10^{-6}(°\text{F})^{-1}$；铜的 $E = 30\times10^6\ \text{lb/in}^2$，$\alpha = 6.5\times10^{-6}(°\text{F})^{-1}$.

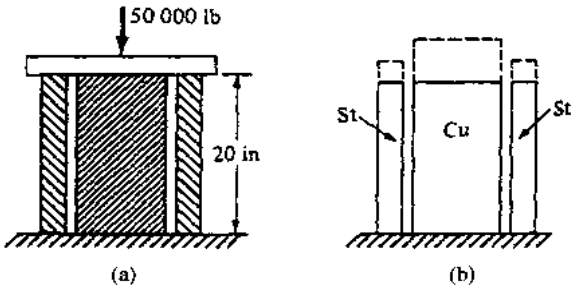


图 9-26

解 分析本题的一种方法是假设将载荷和盖板全都除去，允许系统在温度升高 ΔT 时可以自由膨胀. 在这种条件下圆柱的顶端将可达到图 9-26(b)中虚线所画位置.

铜圆柱会比钢圆柱膨胀得更高，因为铜的线热膨胀系数比钢的大. 钢圆柱向上膨胀的高度用 in 表示是 $(6.5\times10^{-6})(20)\Delta T$；铜圆柱为 $(9.3\times10^{-6})(20)\Delta T$.

当然这并非真实情况，因为 50 000 lb 的载荷尚未考虑在内. 如果这个轴向载荷全部都由铜圆柱承受，则只有铜圆柱受到压缩，而缩短的长度为

$$\Delta_{Cu}=\frac{PL}{AE}=\frac{50\,000(20)}{10(16\times10^{6})}$$

我们希望温升 ΔT 正好能使全部的载荷被铜圆柱承受. 换句话说，我们要求得 ΔT，使得铜圆柱的净膨胀(热膨胀减去载荷压缩)正好等于钢的热膨胀. 故有

$$(9.3\times10^{-6})(20)\Delta T-\frac{50\,000(20)}{10(16\times10^{6})}=(6.5\times10^{-6})(20)\Delta T$$

解得 $\Delta T=111\ ^{\circ}\mathrm{F}$.

9.16 图 9-27(a)中一个类似桁架的结构建在刚体 $AIECB$ 上，从 A 点和 C 点引出两根斜杆铰接于 O 点，而该铰接点又通过一根垂直杆与 B 点连接. 然而，垂直杆 BO'' 意外地短了 0.06 in，所以只得将该杆拉伸而将 AO 杆和 CO 杆压缩才能使它们铰接. 所有的杆都是钢的，所以 $E=30\times10^{6}\ \mathrm{lb/in^2}$. 垂直杆的截面积为 A_1，每根斜杆的截面积为 $1.5A_1$. 求三根杆中每一根杆内的应力.

解 图 9-27(b)是在三根杆已经铰接后 O 点的分离体图，以 F_2 表示每根斜杆中的压力，以 F_1 表示垂直杆中的拉力. 由于对称性，两根斜杆中的压力是相等的，且由垂直方向的平衡可得关系式

$$\sum F_y=2F_2\frac{1}{\sqrt{2}}-F_1=0\ \text{或}\ F_2=\frac{\sqrt{2}}{2}F_1 \tag{1}$$

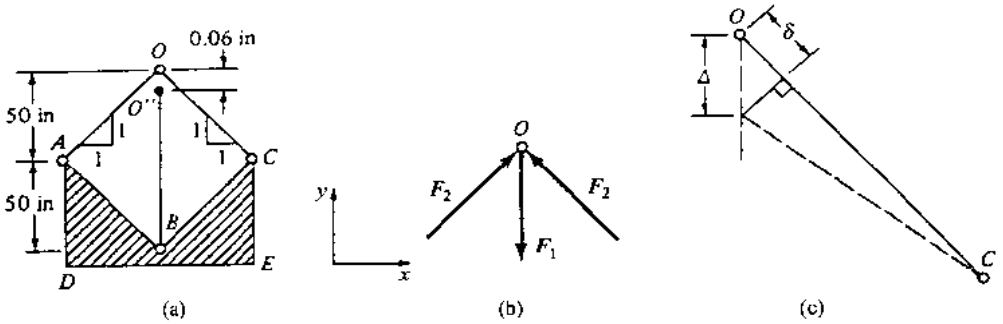


图 9-27

考虑杆的变形，杆 CO 可以认为先像刚体那样绕 C 点转动，然后再在 CO 方向上被压缩一段长度 δ，或者在 y 方向上被压缩一段长度 Δ，如图 9-27(c)所示. 杆 BC'' 伸长量为 $F_1(100)/A_1E$，这一伸长加上 Δ 必须等于 0.06 in：

$$\frac{F_1(100)}{A_1E}+\frac{F_2(50\sqrt{2})}{1.5A_1E}\frac{1}{\cos45^{\circ}}=0.06 \tag{2}$$

联立解式(1)和式(2)，且 E 已知为 $30\times10^{6}\mathrm{lb/in^2}$，得

$$\sigma_1=\frac{F_1}{A_1}=12\,200\ \mathrm{lb/in^2}(\text{拉力})$$

$$\sigma_2=\frac{F_2}{1.5A_1}=5800\ \mathrm{lb/in^2}(\text{压力})$$

铰接点最终的位置并不在 O 和 O'' 点之间，你可以通过利用 $\sigma_1=12\,200\ \mathrm{lb/in^2}$ 计算式(2)中 $F_1(100)/A_1E$ 这一项看到这一点.

弹性分析：均匀剪切应力

9.17 如何用例题 8.20 中的方法来描述任意平面上的均匀剪切力？

解 令例题 8.20 的式(8)中 $A_2=C_2=0$，则式(8)变成 $\Phi_2=B_2xy$. 由该例题的(3)式可得

$$\sigma_x-\sigma_y=0,\quad \tau_{xy}=-B_2=\text{常数}$$

于是，简单的应力函数 $\Phi_2=B_2xy$ 可以用来描述均匀的二维剪应力状态. 上面所描述的剪切应力所在平面与 x 轴相垂直且与物体相截. 所以剪切应力与 yz 平面平行，如图 9-28 所示.

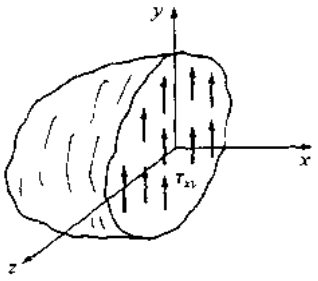


图 9-28

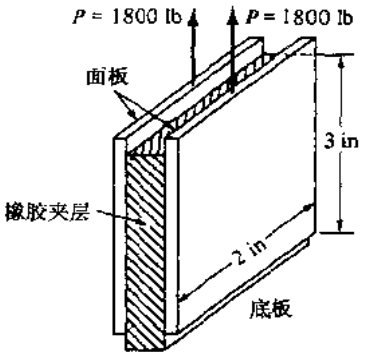


图 9-29

9.18 一种通常采用的减震系统由合成橡胶的夹层和与之相接的两块金属面板组成，如图 9-29所示. 橡胶夹层的下端与一块底板相接，每一块面板上都作用有载荷 **P**. 求传递到橡胶夹层上的平均剪应力.

解 右侧面板的隔离体图表明，向下作用的剪切应力假设是均匀分布在 2 in 宽 3 in 高的接触面上. 在图 9-30 中剪切应力用虚线矢量该剪切应力与右侧面板作用在橡胶夹层前邻接面上的剪切应力等值反向，在图 9-31 中后者用实线矢量表示. 由左侧面板作用在夹层后邻接面上的应力在图中以虚线矢量表示.

由右侧面板的平衡，可写出

$$\sum F_y=\mathbf{P}-\tau_{xy}(3\text{ in})(2\text{ in})=0$$

解得 $\tau_{xy}=300\text{ lb/in}^2$.

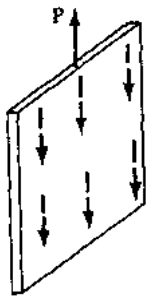


图 9-30

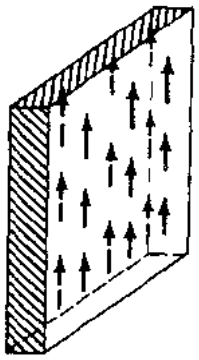


图 9-31

最终强度(极限设计)

在下面的每个例题中假设材料的行为服从图 9-2 理想的应力-应变关系. 在每一道例题中求得的最终载荷或称极限载荷，是在假定材料具有无限延展性的前提下所能承受的最大载荷. 所谓无限延展性就是应力-应变曲线的平坦部分能向右无限延伸. 虽然图 9-2 隐含有无限变形的可能性，实际上没有哪个结构能够允许过度的变形.

注意，图上对应于屈服应力的应变不是惟一的．因此，采用此处给出的方法，不可能求得系统的变形．进一步说，基于非弹性行为得到的最终强度问题的解不能作为例题 8.20 的一个特例，因为 8.20 中方程的推导是建立在屈服点以下应力和应变呈线性关系的基础上的．

9.19　某种复合材料板由树脂基和沿载荷方向延伸的强化纤维束构成．其某一典型截面上承受 4000 N 载荷且有 4 束加强纤维，每束直径为 0.1 mm，如图 9-32 所示．求每一束纤维上的剪切应力．

解　☞ 单股纤维束的分离体图如图 9-33 所示．该图表明，1000 N 的轴向载荷必由剪切应力来抵抗，而剪切应力假定是均匀分布在纤维束圆柱状的外表面上．由垂直方向平衡可知

$$\sum F_y = 1000 - \tau_{xy}(0.2\ \text{m})(\pi)(0.1\ \text{mm})\left(\frac{1\ \text{m}}{10^3\ \text{mm}}\right) = 0$$

解得　$\tau_{xy} = 15.9$ MPa.

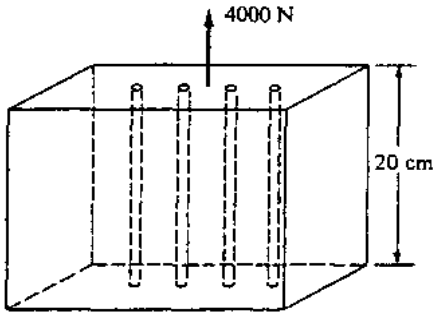


图 9-32

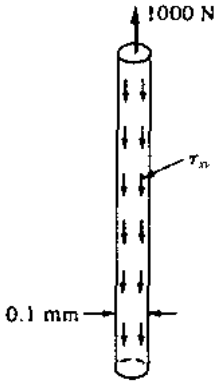


图 9-33

9.20　一根刚性水平杆由四根对称分布的斜缆绳吊住，如图 9-34(a)所示．每根缆绳的截面积为 A，其材料的屈服应力为 σ_{yp}．求该系统所能承受的最终垂直载荷 P_u．

解　☞ 由于对称性，所有四根杆将同时达到屈服点．所以屈服时杆的分离体图如图 9-34(b)所示由静平衡，

$$\sum F_y - 4\sigma_{yp}A\sin 60^\circ - P = 0$$

解得　$P_u = 3.46\ \sigma_{yp}A$．

将 P_u 除以一个适当的安全系数就得到该系统的工作载荷．在上述分析中变形不必考虑．事实上，垂直方向位移是不可能求得的，因为在图 9-2 上对于屈服应力 σ_{yp} 找不到惟一的应变与之对应．

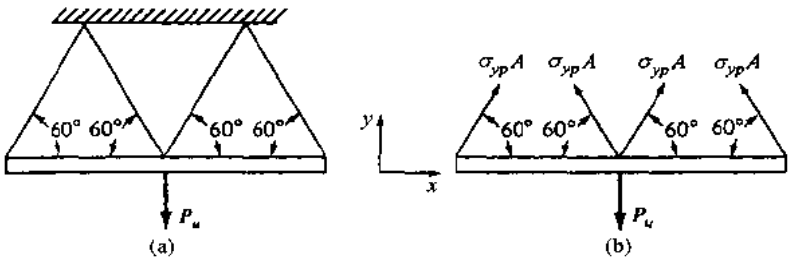


图 9-34

9.21　杆 AB 和 BC 的端点铰接且在 B 点承受 5 kN 的最终垂直载荷，如图 9-35(a)所示．材料是钢的，$\sigma_{yp} = 240$ MPa．求每根杆最小的截面积．

解　☞ 铰接点 B 的分离体图如图 9-35(b)所示．由静平衡，一定有

$$\sum F_y = \frac{3}{5}F_1 - 5 = 0 \text{ 或 } F_1 = \frac{25}{3}\text{ kN}$$

$$\sum F_x = F_2 - \frac{4}{5}F_1 = 0 \text{ 或 } F_2 = \frac{20}{3}\text{ kN}$$

当两根杆都取最小截面时，则应同时达到曲服点(即 σ_{yp})．所以有

$$F_1 = \sigma_{yp}A_1 \text{或} \frac{25}{3}1000\text{ N} = (240\times 10^6\text{N/m}^2)A_1$$

解得 $A_1 = 34.7\times 10^{-6}\text{m}^2$ 或 34.70 mm^2，以及

$$F_2 = \sigma_{yp}A_2 \text{或} \frac{20}{3}1000\text{ N} = (240\times 10^6\text{N/m}^2)A_2$$

解得 $A_2 = 27.78\times 10^{-6}\text{ m}^2$ 或 27.78 mm^2．

设计中，上述求得的截面积当然要乘以安全系数放大才能被接受的．注意，不可能求得 B 点的位移，还是因为在图 9-2 上对于曲服点找不到惟一与之对应的变应．

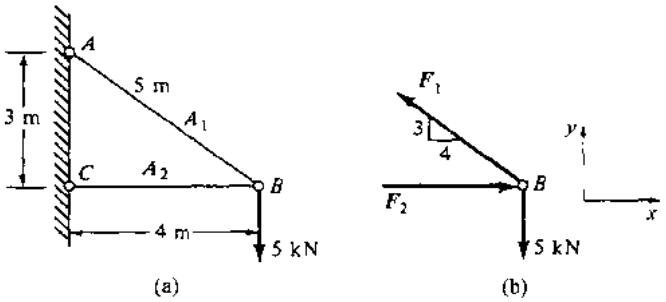


图 9-35

补 充 习 题

9.22 图 9-36 中的圆杆左端固结于墙上且承受如图所示的轴向力．AB 段的恒截面面积为 2600 mm^2，BD 段为 1300 mm^2．求最大的轴向应力．圆杆的自重忽略不计．

答案：152 MPa

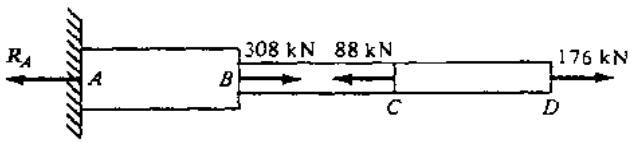


图 9-36

9.23 用于复合材料的玻璃纤维具有 500 000 lb/in^2 的拉伸强度和 50×10^6 lb/in^2 的弹性模量．求：在 450 000 lb/in^2 拉伸应力作用下，一根长 0.75 in 直径为 0.0001 in 的玻璃纤维束伸长多少？

答案：0.00675 in

9.24 一根 20 mm 厚的平板钢杆在 $x = 0.8$ m 至 $x = 2.0$ m 区间内其轮廓曲线为 $y = 0.1\,x^{1/2}$，如图 9-37 所示．该杆承受 1 MN 的轴向拉伸载荷作用．钢的弹性模量为 210 GPa．利用例题 9.4 中的 FORTRAN 程序求杆的伸长．

答案：2.52 mm

9.25 求例题 9.10 中 7.5 kN 载荷作用点的垂直位移．

答案：3.92 mm

9.26 杆 AC 和 BC 的所有端点均为铰接并承受如图 9-38 所示载荷．求由载荷 P 引起的 C 点位移的水平分量和垂直分量．杆 BC 的截面积为 A_1，杆 AC 的截面积为 $2A_1$．

答案：$\Delta_x = 0.267\,PL/A_1E$；$\Delta_y = 0.7125\,PL/A_1E$

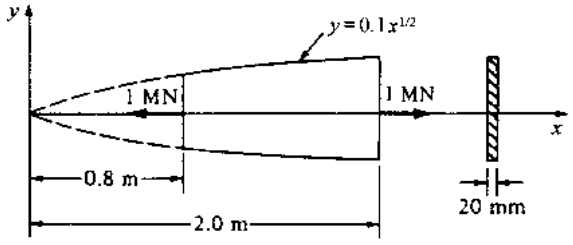


图 9-37

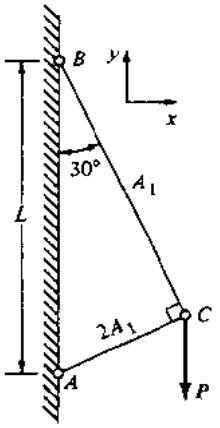


图 9-38

9.27　一块 10 mm 厚的平钢板被两块各为 20 mm 厚的铜板夹在中间，如图 9-39 所示. 三块平板的两端用刚性盖板连结(图上未画). 整个系统均匀加热，同时承受一个如图所示 50 kN 的中心轴向力作用. 问：为使全部载荷作用在钢板上，所需的温升是多少？钢的 $E=210$ GPa，$\alpha=12\times10^{-6}(℃)^{-1}$；铜的 $E=105$ GPa，$\alpha=17.5\times10^{-6}(℃)^{-1}$.

答案：86.6℃

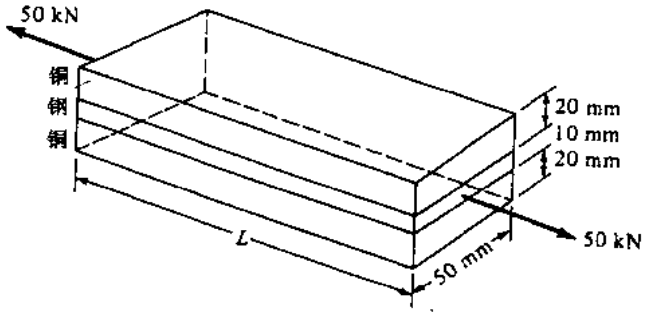


图 9-39

9.28　图 9-40 中的三根缆绳截面积均为 0.25 in^2，且都在一个垂直平面内，它们承受的载荷为 1000 lb. 缆绳在施加载荷之前无应力. 钢的 $E=30\times10^6$ lb/in^2，$\alpha=6.5\times10^{-6}(℉)^{-1}$；铜的 $E=15\times10^6$ lb/in^2，$\alpha=9.3\times10^{-6}(℉)^{-1}$.

(a)求施加载荷后每根缆绳中的应力；

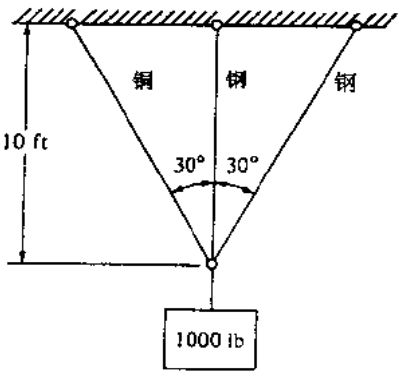


图 9-40

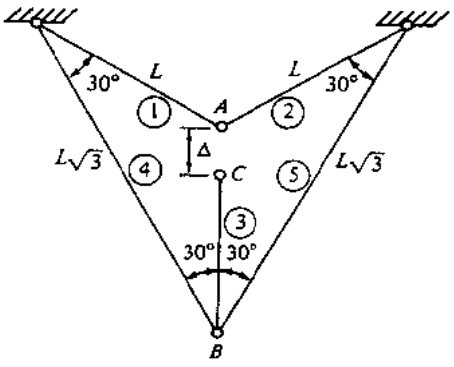


图 9-41

(b)当载荷依然作用且整个系统的温度下降 20°F(华氏)时每根缆绳中的应力.

答案:(a)$\sigma_{st}=1740\ \text{lb/in}^2$,$\sigma_{Cu}=1300\ \text{lb/in}^2$;

(b)$\sigma_{st}=850\ \text{lb/in}^2$,$\sigma_{Cu}=1820\ \text{lb/in}^2$.

9.29 图 9-41 中的一个五杆结构发现 A 点和 C 点有点小缺陷.这两点本该重合的,现在却差一距离 Δ 而不能重合.在这两点被强制重合后,A 和 C 就铰接在一起.求每一根杆中存在的力.所有杆的截面积相同.

答案:$F_1=F_2=F_3=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2+3\sqrt{3}}\right)\dfrac{\Delta AE}{L}$

$F_4=F_5=-\left(\dfrac{1}{2+3\sqrt{3}}\right)\dfrac{\Delta AE}{L}$

9.30 图 9-42 中的两根圆截面杆均与刚性墙固结,但在某一参考温度下仅差 2 mm 而不能相互连接.每根杆的直径为 50 mm.黄铜的 $E=100$ GPa,$\alpha=19.1\times10^{-6}(℃)^{-1}$.铝的 $E=70$ GPa,$\alpha=23\times10^{-6}(℃)^{-1}$.忽略杆的自重,求当温度升高 100 ℃时每根杆内的应力.

答案:90.9 MPa

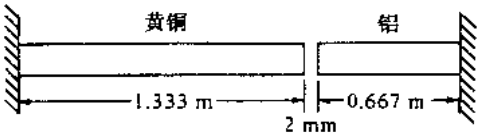


图 9-42

9.31 在例题 9.12 中,若设两侧墙的弹性系数均为 500 MN/m,求杆中的轴向应力.(提示:由于相对于杆中点的对称性,只需考虑半根杆及对应的力和变形.)

答案:68.75 MPa

9.32 玻璃纤维增强的环氧化物是一种常见的复合材料.考虑一股圆柱状的玻璃纤维束,其长为 1.5 in,直径为 0.0001 in.在轴向载荷作用下,其拉伸强度为 500 000 lb/in^2.求在该最大拉伸应力作用时,作用在纤维束弯曲表面上的剪切应力.

答案:82 lb/in^2

9.33 刚性杆 AB 由四根圆杆吊住如图 9-43 所示.圆杆横截面的直径均为 50 mm.它们的曲服应力均为 300 MPa.采用极限设计法,求杆 AB 的最大重量.设杆 AB 的重量是沿其长度均匀分布的.

答案:1.38 MN

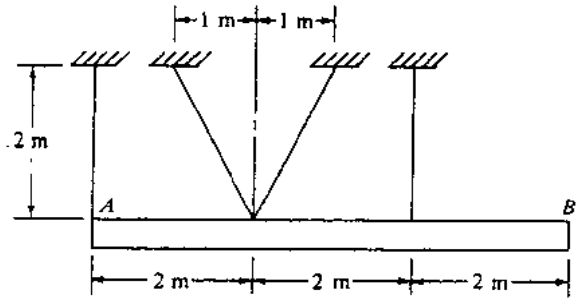


图 9-43

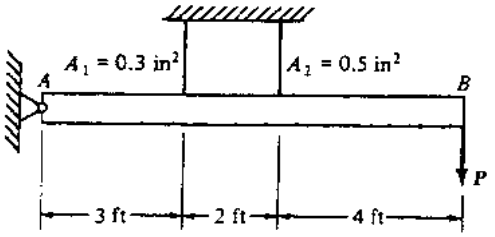


图 9-44

9.34 图 9-44 中的刚性杆 AB 在 A 端铰接并被两根垂直圆杆吊住.圆杆是钢材的,其屈服应力为 40 000 lb/in^2,它们的截面积如图所示.求可以作用于 B 端的最终载荷.

答案:15 100 lb

9.35 一根恒截面(面积为 A)的杆刚性地固结于两扇固定墙之间.杆材是铝质的,$E=75$ GPa,$\sigma_{yp}=140$ MPa 以及 $\alpha=23.2\times10^{-6}(℃)^{-1}$.杆的温度现在由 20℃下降至 −80℃.求温度下降后杆中的应力,假设在 20℃时杆中无应力.

答案:140 MPa

第十章　旋转薄环和薄壳

由内部或外部均匀的法向压力在旋转薄环和薄壳(如中空的圆柱体或球体)中形成的轴对称载荷,是固体在外载荷作用下产生法向应力的一个重要应用实例.本章所讨论的简单理论只有在圆环、圆柱壳或球壳的厚度不超过结构半径约 10% 时才成立.同样,在均匀外部压力情况下,假定结构不会发生变形,于是设计只以应力准则为基础.

圆柱壳体

一个两端封口且壁厚为 h,内半径为 r,长为 L 的圆柱壳体,承受均匀的内部(法向)压力 p,则在壳体材料内产生的圆周应力为

$$\sigma_c = \frac{pr}{h} \tag{10.1}$$

而轴向应力为

$$\sigma_L = \frac{pr}{2h} \tag{10.2}$$

(不包括圆柱壳体两个封闭端).上述应力均为主应力,在这两个方向上没有剪切应力.(见例题 10.1 和 10.2)

在该内部压力(作用在径向和轴向两个方向)作用下,圆柱壳体半径的增量为

$$\Delta r = \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right) \tag{10.3}$$

而圆柱壳体体积的增量为

$$\Delta V = \frac{p\pi r^3 L}{Eh}\left(\frac{5}{2} - 2\mu\right) \tag{10.4}$$

(见例题 10.3 至 10.5)

球壳

一个壁厚为 h、内半径为 r 的球壳,承受均匀的内部(法向)压力 p,则在球壳壁内任一点的法向应力为

$$\sigma = \frac{pr}{2h} \tag{10.5}$$

由于压力相对于球壳中心是逐点对称,所以球壳壁内中面的每一个方向均是主方向.由该内部压力引起的球壳半径的增量为

$$\Delta r = \frac{pr^2}{2Eh}(1 - \mu) \tag{10.6}$$

而球壳体积的增量为

$$\Delta V = \frac{2p\pi r^4}{Eh}(1 - \mu) \tag{10.7}$$

(见例题 10.6 和 10.7)

旋转壳体

图 10-1(a)中的旋转壳体是由一条平面曲线(经线)绕曲线所在平面内的一根轴旋转面形成的.经线的曲率半径(记为 r_1 并如图 10-1(b)中无限小壳元所示)沿着经线的长度是变化的.该曲率半径由两根垂直于壳面并通过图 10-1(b)中的 B 点和 C 点的直线定义.另一参数 r_2 表示在垂直于经线的方向上壳体表面的曲率半径.该曲率半径由通过 A 点和 B 点的壳体

垂线来定义.对应于 r_2 的曲率中心必定落在壳体的对称轴上,尽管 r_1 的曲率中心一般来说不在对称轴上.垂直作用于壳体曲面的内部压力 p 产生如图所示的经线应力 σ_ϕ 和圆周应力 σ_θ

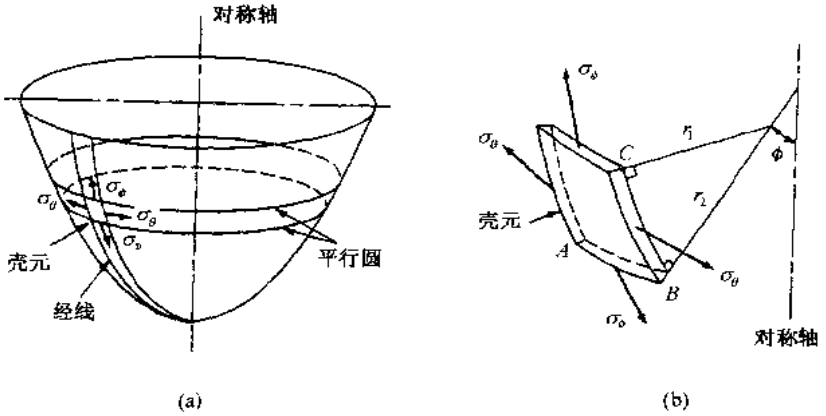


图 10-1

这两个应力相互正交并作用在壳体壁面上.由式(8.20)可以证明,对于均匀分布的经线和纬线应力,有

$$\frac{\sigma_\phi}{r_1}+\frac{\sigma_\theta}{r_2}=\frac{p}{h} \tag{10.8}$$

式中 h 表示壳体的壁厚.通过分析在某个适当的"平行"圆上方或下方整个壳体垂直方向的平衡,可以得到第二个方程式.(见例题 10.9 和 10.10)

例　题

10.1　一个两端由盖板封口的薄壁圆柱壳体承受均匀的内部压力 p.圆柱壁厚为 h,内半径为 r.忽略两端盖板的约束效应,计算由该载荷引起的圆柱壳壁面内轴向(经线方向)和圆周方向应力.

解　为求解圆周应力 σ_c,我们来分析从容器上截下来的一段长为 L 的圆柱壳体.这段壳体一半的分离体图如图 10-2(a)所示.

注意,圆柱壳体这样截开后原先内部的应力(σ_c)现在对图中的分离体来说就是外力了.图 10-2(b)画出了作用在这半个圆柱壳体横截面上的力.径向压力的水平分量由于相对中心垂线的对称性而互相抵消.在垂直方向上有平衡方程

$$\sum F_{垂直}=-2\sigma_c hL+\int_0^\pi pr\mathrm{d}\theta(\sin\theta)L=0$$

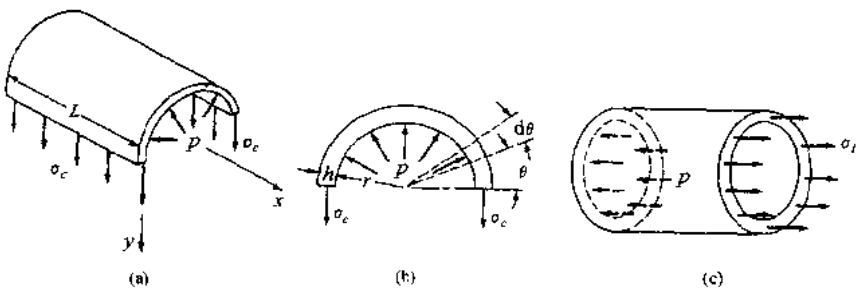


图 10-2

将上式积分，得

$$2\sigma_c hL = -prL[\cos\theta]_0^{\pi} \quad 或 \quad \sigma_c = \frac{pr}{h}$$

由压力 p 引起的垂直方向的合力也可将压力乘以压力作用面积在水平方向的投影面求得.

为求解轴向应力 σ_l，我们用一个垂直于壳体几何轴线的截面来横截壳体. 图 10-2(c)是圆柱壳体截开后剩下的那一部分的分离体图. 由平衡可写出

$$\sum F_{水平} = -p\pi r^2 + 2\pi rh\sigma_l = 0 \quad 或 \quad \sigma_l = \frac{pr}{2h}$$

于是圆周应力是轴向应力的两倍. 由此可知，封闭管道中的水在结冰时，管道将会沿其轴线方向出现裂缝.

令 x 轴与圆柱壳体的几何轴线重合，而 y 轴与壳体相切，如图 10-2(a)所示，并且令例题 8.20 中式(8)的 $B_2=0$，则由该题的式(3)可知

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 2C_2 = 常数$$

$$\sigma_y = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial x^2} = 2A_2 = 常数$$

$$\tau_{xy} = 0$$

很明显一个两端封闭、内部均匀受压的圆柱壳体的应力状态可由下面应力函数求得

$$\Phi_2 = \frac{pr}{2h}x^2 + \frac{pr}{4h}y^2$$

10.2　一内径 3 m，高 25 m 竖直置放的圆筒形钢储油罐(即圆柱形罐)上端敞开且有一垂直轴，罐内装满比重为 0.90×10^4 N/m^3 的油. 罐材是屈服点为 240 MPa 的结构钢且设计中采用的安全系数为 2. 如果假设罐的轴向焊缝与实心金属强度一样，试问罐底钢板的厚度应为多少？如果焊缝强度只有实心金属的 75%，则其厚度又应为多少？

解　圆筒形储油罐底部的压力 p(沿任何方向)可由公式 $p=\gamma h$ 确定，式中 γ 为单位体积液体的重量而 h 为底面上方液柱的高度. 如果我们分析 1 平方米底板上的压力，则上式很明显告诉我们该压力在数值上等于截面积为 1 m^2，高为 h 的油柱的重量. 于是底板上的压力为

$$p = (0.90\times10^4\ \text{N/m}^3)(25\ \text{m}) = 22.5\times10^4\ \text{N/m}^2 = 0.225\ \text{MPa}$$

因为该压力是流体静压力，它在所有方向上大小都一样，尤其是径向作用在圆筒形油罐内壁上的压力，如图 10-3 所示. 由 $p=\gamma h$ 可以看出，径向压力朝罐顶方向减小，如图所示；而最大的压力出现在罐的底部，这正是在设计时必须加以考虑的区域.

因为罐的顶部是敞开的，故那里没有轴向应力. 由例题 10.1 可知罐壁中任一点的圆周应力为 $\sigma_c = pr/h$. 在罐的底部，由 $\sigma_{yp}=240$ MPa 且安全系数为 2，上式变为

$$\frac{240\ \text{MPa}}{2} = \frac{(0.225\ \text{MPa})(1.5\ \text{m})}{h}$$

解之得 $h=0.0028$ m 或 2.8 mm. 这是在假设轴向焊缝的强度与实心金属一样的条件下得出的结论.

如果轴向焊缝的强度只有实心金属的 75%，则钢板的厚度应增至 $b=\frac{4}{3}(2.8\ \text{mm}) = 3.73$ mm.

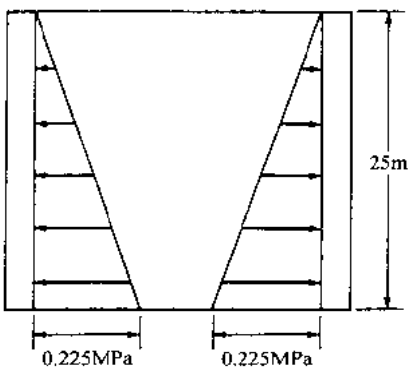


图 10-3

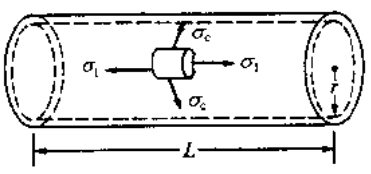


图 10-4

10.3　求薄壁圆柱壳体在内部均匀压力 p 的作用下每单位体积的增量，假设由该压力引起的径向膨胀沿壳体长度 L 是一致的，壳体两端由圆板封闭.

解　壳体和一个典型的微元如图 10-4 所示，同时在微元上也标出了主应力 σ_c 和 σ_l. 习惯上采用胡克定律式(8.16)的二维形式，所以圆周应变和轴向应变 ϵ_c 和 ϵ_l 分别为

$$\epsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \mu\sigma_l) = \frac{1}{E}\left(\frac{pr}{h} - \mu\frac{pr}{2h}\right)$$

$$\epsilon_l = \frac{1}{E}(\sigma_l - \mu\sigma_c) = \frac{1}{E}\left(\frac{pr}{2h} - \mu\frac{pr}{h}\right)$$

于是由 ϵ_c 引起的圆周增量为

$$2\pi r\epsilon_c = \frac{2\pi pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

而膨胀后的半径为

$$r' = \frac{\text{最终的圆周}}{2\pi} = \frac{2\pi r + \frac{2\pi pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)}{2\pi}$$

$$= r + \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)$$

壳体长度的变化就是

$$L\epsilon_l = \frac{prL}{Eh}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)$$

所以膨胀后的长度为

$$L' = L + \frac{prl}{Eh}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)$$

于是膨胀后的壳体体积为

$$\pi(r')^2L' - \pi\left[r + \frac{pr^2}{Eh}\left(1 - \frac{\mu}{2}\right)\right]^2\left[L + \frac{prL}{Eh}\left(\frac{1}{2} - \mu\right)\right]$$

将上式展开，舍去含 p/E 高次项，再减去原有的体积，就得到体积的增量

$$\Delta V = \frac{p\pi r^3L}{Eh}\left(\frac{5}{2} - 2\mu\right)$$

于是，单位体积的体积变化为

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\frac{p\pi r^3L}{Eh}\left(\frac{5}{2} - 2\mu\right)}{\pi r^2L} = \frac{pr}{Eh}\left(\frac{5}{2} - 2\mu\right)$$

10.4　谷物在加工之前通常都储存在筒仓里(筒仓实质上就竖直的圆柱壳体，如图 10-5 所示). 来自阳光的热量加上存在于谷物内的水气会使储藏的谷物膨胀，从而导致筒仓壁产生应变. 测量表明筒仓下部的半径变化约 0.25%(变化增大，谷物体积膨胀会造成谷物垂直方向的位移). 谷物与筒仓内壁之间的摩擦可以忽略不计. 对于一个半径为 3 m，壁厚 10 mm 以及 $E = 200$ GPa 的筒仓，求由膨胀引起的圆周应力.

解　作为一种近似，我们只考虑图 10-5 中最底下的高度为 a 的圆柱谷物盘. 忽略摩擦，近似有 $\epsilon_l = 0$，所以盘上的圆周应变为

$$\epsilon_c = \frac{1}{E}(\sigma_c - \mu\sigma_l) = \frac{1}{E}\frac{pr}{h}$$

式中 p 为谷物对筒仓内壁产生的径向压力. 该圆盘圆周的增量为 $2\pi r\left(\frac{pr}{Eh}\right)$，伸长后的圆周长为 $2\pi r + 2\pi r\left(\frac{pr}{Eh}\right)$.

这样，膨胀后的半径为

$$r + \frac{pr^2}{Eh}$$

但这个半径是原先半径的 1.0025 倍，所以有

$$1.0025r = r + \frac{pr^2}{(200 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(0.010\ \text{m})}$$

当 $r = 3$ m 时，上式解得 $p = 1.67$ MPa. 于是靠近筒仓底部的圆周应力为

$$\sigma = \frac{pr}{h} = \frac{(1.67\times10^6\ \text{N/m}^2)(3\text{m})}{(0.010\ \text{m})} = 500\ \text{MPa}$$

只有相当高强度的钢材才有这样高的屈服点.这就解释了为何筒仓有时会由于水气诱发的谷物膨胀而出现裂缝.

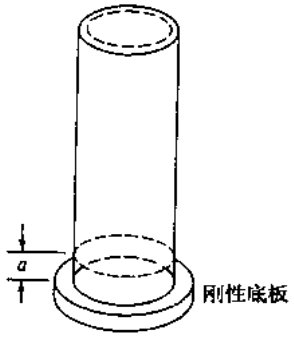


图 10-5

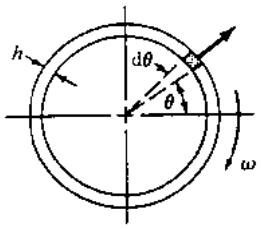


图 10-6

10.5　一个薄钢环要在一根刚性圆轴上滑动.轴的直径为 16 in,而环的内径意外地小了0.002 in.环先被加热,然后套到轴上让其冷却,形成冷缩配合.环的壁厚为 0.1 in,其比重 γ 为 0.283 lb/in^3,$E=30\times10^6$lb/in^2.轴能在端部轴承中旋转.求使圆环开始与轴脱离接触的轴旋转角速度.

解　图 10-6 表示薄圆环以及作用在面对圆心角 $d\theta$ 的一段圆环微元上的惯性力.作用在微元上的惯性力为

$$\frac{W}{g}r\omega^2$$

其中 W 为微元的重量,g 为重力常数,r 为环的内半径,ω 是以弧度表示的角速度.若圆环在垂直纸面方向的长度为 L,则上式变为

$$\frac{(\gamma r\,d\theta hL)r\omega^2}{g}$$

圆环与轴之间单位接触面上的作用力为

$$\frac{(\gamma r\,d\theta hL)r\omega^2}{g(r\,d\theta L)} = \frac{\gamma hr\omega^2}{g}$$

上式具有压强的单位.

由例题 10.4 可知,在没有轴向力的情况下由向外作用的压力 p 引起圆环半径的增量为 $\Delta r = pr^2/Eh$.这里 p 为单位接触面上的惯性力,而要让圆环开始滑动,我们需要 $\Delta r = 0.001$ in,于是

$$0.001\ \text{in} = \frac{\frac{\gamma hr\omega^2}{g}r^2}{Eh} = \frac{\frac{(0.283\ \text{lb/in}^3)(0.1\ \text{in})(8\ \text{in})\omega^2}{(386\ \text{in/s}^2)}(8\ \text{in})^2}{(30\times10^6\ \text{lb/in}^2)(0.1\ \text{in})}$$

解得 $\omega = 283$ rad/s 或 2700 rpm.

10.6　一封闭的薄壁球壳承受均匀的内部压力.球壳的内径为 r,壁厚为 h.推导求解壁内拉应力的表达式.

解　我们来分析其中的半个球壳.在这半个球壳上作用有内部压力 p 以及另外半个球壳对它的作用力.由于载荷和变形的对称性,这些力可以用圆周拉应力 σ_t 表示,如图 10-7 的分离体图所示.

该图标出了作用在半球上的力,但是只标出了半球在垂直平面上的投影.实际上压力 p 是作用在半球的整个内表面上,而且在每一点上都与表面相垂直.然而正如例题 10.1 所说的,压力的合力可以由 p 乘以该作用面的投影而求得,在这里投影为半径为 r 的圆面积.拉应力 σ_t 只作用在内半径为 r,宽为 h 的"圆环"上.于是由平衡可写出,

$$\sum F_x = \sigma_t 2\pi rh - p\pi r^2 = 0 \quad \text{或} \quad \sigma_t = \frac{pr}{2h}$$

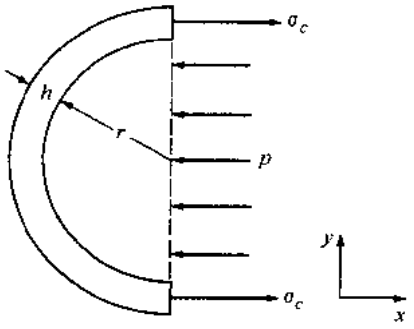


图 10-7

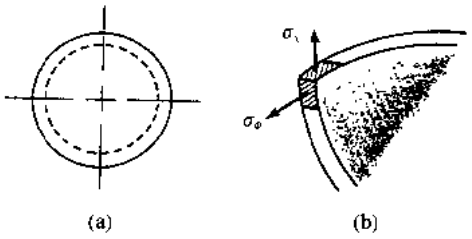


图 10-8

由于对称性，上述圆周应力在球壳壁的任何点及任何方向上都是一样的.

如果我们用两个互相垂直且通过直径的平面来截球壳，则截得如图 10-8 中有阴影的一个面元. 由于球壳的逐点对称性，我们可以将这两个相互垂直的法向应力称为 σ_x（正如图中所标的）. 若现在令例题 8.20 中式(8)的 $A_2 = B_2 = 0$，则由该题的式(3)可得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \Phi_2}{\partial y^2} = 2C_2 = \text{常数}$$

显而易见，一个内部受压球壳的应力状态可从下面的应力函数求得

$$\Phi_2 = \frac{pr}{4h} y^2$$

10.7　一薄壁钢球壳内半径为 1.5 m. 钢材的法向工作应力为 125 MPa，$E = 200$ GPa，$\mu = 0.3$. 球壳承受 3.5 MPa 的均匀内部压力. 求所需壁厚的最小值. 假定球壳内部加压是分两步进行的，先是用不受压的水将整个球壳充满，然后再灌入增加部分的水直至压力达到 3.5 MPa. 求后来灌入的增加部分水的体积. 水的体积模量为 2100 MPa.

解　球壳壁内任一点上任一方向的法向应力已在例题 10.6 中求出，$\sigma_c = \frac{pr}{2h}$. 本题中，

$$\sigma_c = 125 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = \frac{(3.5 \times 10^6 \text{N/m}^2)(1.5 \text{ m})}{2h}$$

由上式解得 $h = 0.021$ m $= 21$ mm，这就是所需的壁厚.

由于这 3.5 MPa 的压力，金属球壳体积的增量为

$$\Delta V = \frac{2\pi p r^4}{Eh}(1 - \mu) = \frac{2\pi(3.5 \times 10^6 \text{N/m}^2)(1.5 \text{ m})^4(0.7)}{(200 \times 10^9 \text{N/m}^2)(0.021 \text{ m})} = 0.01854 \text{ m}^3$$

水的可压缩性必须加以考虑. 由式(8.19)，作为体积模量，我们有 $K = -p/e$；该式表明，体积模量定义为流体静压力与单位体积变化之比的负值. 所以上式又可写成

$$K = -\frac{p}{\Delta V/V} \quad \text{或} \quad 2100 \times 10^6 \text{ N/m}^2 = -\frac{3.5 \times 10^6 \text{N/m}^2}{\Delta V/V}$$

解之，得 $\frac{\Delta V}{V} = -0.00166.$　(1)

于是，由于加压造成水体积的减少量为

$$\Delta V = -0.00166 \frac{4}{3}\pi(1.5 \text{ m})^3 = -0.02347 \text{ m}^3$$

解到这一步我们必须十分谨慎. 有人可能就简单地将上面两个结果相加.

$$0.01854 + 0.02347 = 0.0420 \text{ m}^3$$

作为我们为了加压必须泵入的增加部分水的体积. 不错，这么大小的一个空穴确实存在. 然而，这个空穴注入的必须是经过压缩的水. 为了在 3.5 MPa 压力下获得体积为 $V = 0.0420$ m^3 的水，利用式(1)可以求得我们必须注入不受压的体积为

$$V + (-\Delta V) = V(1 + 0.00166) = 0.04207 \text{ m}^3$$

的水.

对于上述特定的数据，上面最后的修正量的确非常小，仅约为未修正值的 0.16%. 然而，要让本题的求解在逻辑上一致，这个修正量是不可缺少的.

10.8　一个分层压力容器由两个薄壁同轴圆柱壳体构成，如图 10-9(a)所示.组装之前两个壳体之间有一点“干扰”，即内壳体太大而不能滑入外壳体.将外壳体加热，放入内壳体，任其冷却，于是形成冷缩配合.假定两个壳体都是钢的，整个装置的平均直径为 100 mm，初始干扰(直径)为 0.25 mm.求由于冷缩在每一个壳体上产生的切向应力.内壳体的厚度为 2.5 mm，外壳体的厚度为 2 mm.取 $E=200$ GPa.

解　很明显，即使没有外面施加的载荷，在两个壳体相邻接的面之间存在界面压力 p.该压力 p 可以认为会增加外壳体的直径同时缩小内壳体的直径，于是内壳体就组装在外壳体中了.

由径向压力单独引起的圆柱壳体径向膨胀已在例题 10.3 中求出，应等于 pr^2/Eh.在本题中，压力 p 引起的外壳体半径增量，加上压力 p 引起的内壳体半径的缩小，必等于两壳体半径之间的初始扰动，或者说是 0.25/2 mm.所以有

$$\frac{p(50)^2}{(200\times10^9\times10^{-6})(2.5)}+\frac{p(50)^2}{(200\times10^9\times10^{-6})(2)}=0.125 \text{ 或 } p=11.1 \text{ MPa}$$

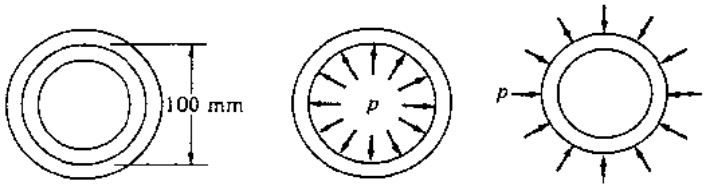
在外壳体与内壳体冷缩配合后，两壳体之间就有上面的压力作用了，如图 10-9(b)和(c)所示.所以

$$\sigma_c=\frac{pr}{h}=\frac{(11.1\times10^6)(50)}{2.5}=-222 \text{ MPa 和}$$

$$\sigma'_c=\frac{(11.1\times10^6)(50)}{2}=277 \text{ MPa}$$

分别为内壳体和外壳体中的圆周应力.

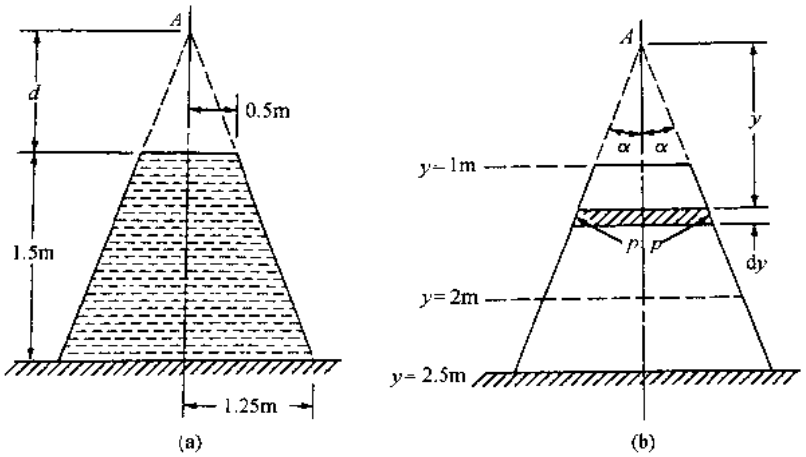
作为一个例子来说，若分层壳体承受均匀的内部压力，这些由“冷缩配合”引起的应力将与利用例题 10.1 简单公式求得的应力代数相加.



(a) 分层压力容器　(b) 外圆柱壳　(c)内圆柱壳

图 10-9

10.9　一个形状为截顶的正圆锥储油罐底部与底板固结并注满了比重为 0.9×10^4 N/m^3 的油，其几何尺寸如图 10-10(a)所示.求位于油罐顶下方 1 m 处点的径线应力和圆周应力，油罐壁厚为 0.3 mm.



(a)　(b)

图 10-10

解 ☞ 假设圆锥的顶点位于油罐顶上方距离为 d 的地方. 由相似三角形可知

$$\frac{d+1.5}{1.25}=\frac{d}{0.5},\text{所以 } d=1\text{ m}$$

这样,我们所求应力的点位于顶点下方 $y=2$ m 处. 油施加的压力处处与罐内表面垂直,如图 10-10(b)所示. 在顶点 A 下方任意深度 y 的地方,我们来分析一个垂直高度为 dy 承受压力为 p 的圆环状面元. 这样的面元斜高为 $dy\sqrt{5}/2$,而由 p 引起的力与斜高面相垂直. 在圆环状面元上合力的垂直分量为

$$p\left[\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\sqrt{5}dy}{2}\left(2\pi\frac{y}{2}\right)\right]\text{或}\frac{p\pi y}{2}dy$$

由流体静力学可知 $p=w(y-1)$,式中 w 为油的比重.

如果现在将从 $y=1$ m 到 $y=2$ m 的油罐上那部分所有的圆环垂直方向的力加起来,我们将得到由于油压而作用在油罐上那部分垂直向上的合力. 即

$$\int_{y=1}^{y=2}\frac{\pi w}{2}(y-1)ydy=1.310\,w=11790\text{ N}$$

在罐顶($y=1$ m)和我们所求应力位置($y=2$ m)之间的那一部分油罐的分离体图如图10-11所示,其中 σ_φ 为径线应力. 由垂直方向的平衡

$$11\,790\text{ N}-\sigma_\varphi(2\pi)(1\text{ m})(0.0003\text{ m})\frac{2}{\sqrt{5}}=0\text{ 或 }\sigma_\varphi=7.00\text{ MPa}$$

式(10.8)中的曲率半径 r_2 为旋转面与壳体对称轴之间的垂直距离,如图 10-11 所示. 我们同样定义 r_0 为 r_2 在垂直于对称轴平面上的投影. 对于图 10-11 的圆锥罐,有 $r_0/r_2=\cos\alpha$ 和 $\tan\alpha=r_0/y$. 联立上面两式可解得在 $y=2$ m 处

$$r_2=\frac{y\tan\alpha}{\cos\alpha}=\frac{(2\text{ m})(1/2)}{2/\sqrt{5}}=1.118\text{ m}$$

因为圆锥的母线是直线,所以径线的曲率半径 r_1 为无穷大. 故由式(10.8),对油而言

$$p=w(y-1)=(0.9\times10^4\text{ N/m}^3)(1\text{ m})$$
$$=0.9\times10^4\text{N/m}^2$$

有 $\dfrac{\sigma_\phi}{\infty}+\dfrac{\sigma_\theta}{1.118}=\dfrac{0.9\times10^4\text{N/m}^2}{0.0003\text{ m}}$

解得 $\sigma_\theta=33.6$ MPa.

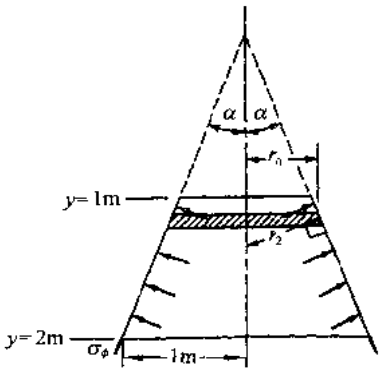


图 10-11

10.10 托卡克核聚变试验堆是用来进行等离子体聚变发电的实验装置,其形状为一环形壳体(图 10-12). 环形腔体内几乎是真空,而腔体外部承受大气压力. 如果壳体的材料是曲服点为 48 500 lb/in^2 的钢材且要求安全系数为 4.5,求所需的壁厚.

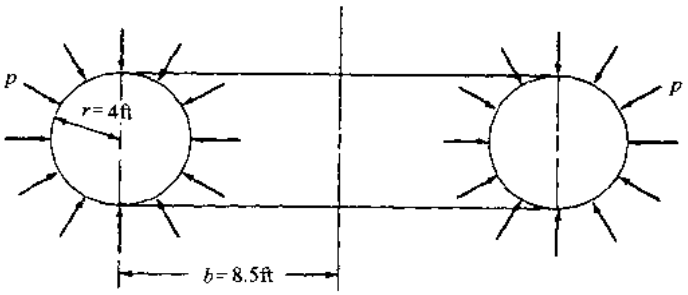


图 10-12

解 ☞ 环形壳体的横截面(图 10-13)暴露了未知的径线应力 σ_ϕ 和圆周应力 σ_θ. 在分析时我们将这些未知应力视为正值,即对应于拉应力.

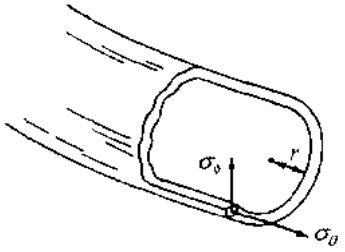


图 10-13

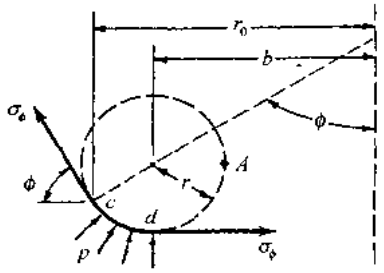


图 10-14

我们首先分析在某个方便的"平行"圆(在图 10-14 中以角 ϕ 表示)下方的整个壳体垂直方向的平衡.大气压力取为正值且以矢量 **p** 表示,其作用的方向处处与外表面相垂直.未知的径线应力为 σ_ϕ,该应力的定义如图 10-1(b)所示.并标注在图 10-13 中.在例题 10.6 中我们已知道由压力 p 引起的作用在截面 CD 上的垂直方向合力可由压力乘以该受力截面的水平投影而求得.于是,由环形段 cd 的力平衡,有

$$2\pi r_0 h\sigma_\phi \sin\phi + p\pi(r_0^2 - b^2) = 0$$

由几何关系可知,$\sin\phi = (r_0 - b)/r$,所以

$$\sigma_\phi = -\frac{pr(r_0 + b)}{2r_0 h} \tag{1}$$

很明显,该应力的峰值出现在最靠内的点 A,在 A 点 $r_0 = b - r$ 且

$$\sigma_{\phi(\max)} = -\frac{pr}{2h}\frac{2b - r}{b - r} \tag{2}$$

若将由式(1)确定的 σ_ϕ 代入式(10.8)且利用 $r_0 = b + r\sin\phi$,$r_1 = r$ 和 $r_2 = (b + r\sin\phi)/\sin\phi$,可得

$$\sigma_\theta = -\frac{pr}{2h}$$

该式在环形壳体的所有点上皆成立.很明显,由式(2)得到的 σ_ϕ 的峰值超过了 σ_θ 的值,因此,σ_ϕ 的最大值控制壳体的设计.

为求得对应于 σ_ϕ 最大值的壁厚 h,我们将求得的值代入式(2)并利用 $p = 14.7\ \text{lb/in}^2$,得

$$-\frac{48500\ \text{lb/in}^2}{4.5} = -\frac{(14.7\ \text{lb/in}^2)(48\ \text{in})[(17 - 4)\text{ft}]}{2h[(8.5 - 4)\text{ft}]}$$

解之,得 $h = 0.0946\ \text{in} \approx 0.1\ \text{in}$

补充习题

10.11 深潜考察船"厄鲁米诺特"号有一个外径 2.5 m,壁厚 150 mm 的圆柱壳体耐压船身.船身由曲服点为 450 MPa 的铝合金构成.求:当考察船在海面下 5000 m 的深海工作时,耐压圆柱壳体船身上的圆周应力.计算时采用壳体的平均直径,并且认为海水的比重为 $10^4\ \text{N/m}^3$.

答案:392 MPa

10.12 水下考察船"艾尔文"号有一个半径为 39.64 in,壁厚 1.33 in 的耐压球壳形船身.船身由曲服点为 100 000 lb/in^2 的 HY-100 钢材构成.求:当球壳达到曲服点应力时考察船潜水的深度.海水比重为 64.0 lb/in^3.

答案:15 100 ft

10.13 用来救援失事潜水艇的深潜救生船有一个耐压船身,其结构为三个内部联通的球壳,如图 10-15 所示.球壳的外径 7.5 ft 壁厚 0.75 in.材料的曲服点为130 000 lb/in^2.求:当救生船在海面下 3500 ft 工作时,球壳内的圆周应力.球壳连接处的应力集中现象以及由流体静压力引起的变形可忽略不计.

答案:46 700 lb/in^2

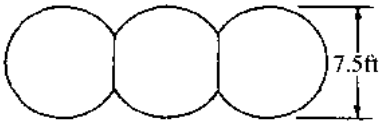


图 10-15

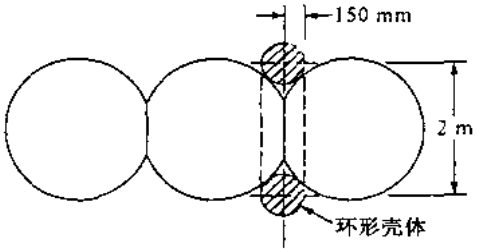


图 10-16

10.14 例题 10.13 中的深潜救生船在两个内部联通的球壳连接处有一个环形壳体状的压缩空气储存罐，如图 10-16 所示. 环形壳体罐由极限拉伸强度为 1000 MPa 的钢材构成，若要求环形壳体罐能承受内部 30 MPa 的空气压力，并且设计中采用安全系数为 3 in，其壁厚应为多少？

答案：14.7 mm

10.15 一薄壁正圆柱壳承受 0.6 MPa 的内部均匀压力. 壳体直径为 0.8 m，长为 7 m，壁厚 5 mm. 壳体材料为钢，它的 $E=200$ GPa，$\mu=0.3$. 计算由于该压力引起的壳体体积增量.

答案：0.00160 m^3

10.16 考虑例题 10.12 中的“艾尔文”水下考察船，当船在 15 100 ft 的深海下达到曲服点时，求耐压球壳船身内部体积减小量. 取 $E=30\times10^6$ lb/in^2，$\mu=0.3$.

答案：1829 in^3

10.17 一个内径 199.50 mm 径向厚度 2 mm 的薄铜环加热后套到一个直径 200 mm 的刚性圆轴上. 求当装置冷却到室温时，铜环上的圆周应力. 铜环材料的 $E=100$ GPa.

答案：250 MPa

10.18 一个形状为半径 30 ft 的竖直正圆柱壳体储油罐存有比重为 0.82 的柴油，油深 60 ft. 壳体蒙板为钢材，其曲服点为 40 000 lb/in^2，要求的安全系数为 3. 求罐底板所需的最小壁厚，局部弯曲效应可忽略不计.

答案：0.575 in

10.19 一个倒挂的薄壁圆锥壳体里倒入一半高度的水银（比重 13.6），如图 10-17 所示. 求在固结处下方 0.25 m 的一个点上的径线应力和圆周应力. 壳体的壁厚为 1 mm.

答案：$\sigma_\phi=2.52$ MPa，$\sigma_\theta=0$

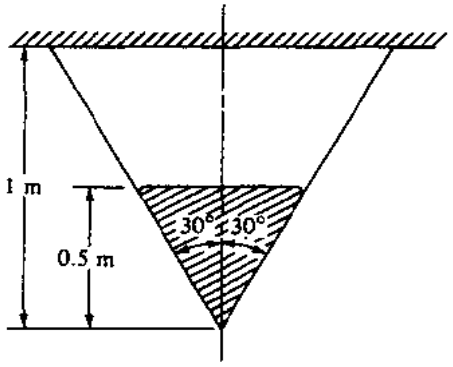


图 10-17

10.20 一薄壁弹性环形壳体的几何尺寸如图 10-18 所示，其壁厚 2 mm. 壳体内部气压为 0.05 MPa. 求壳体的最大径线和圆周应力.

答案：$\sigma_\phi=2.81$ MPa；$\sigma_\theta=1.25$ MPa

10.21 一个半径 R 壁厚 h 的半球形容器注入部分比重为 γ 的液体，如图 10-19 所示. 壳体的整个上边圈如图所示铰接. 求壳体内的应力.

答案：当 $\alpha<45°$ 时，$\sigma_\phi=-\sigma_\theta=\dfrac{\gamma R^2}{h}\dfrac{0.0382}{\cos^2\alpha}$；

当 $45°<\alpha<90°$ 时，$\sigma_\phi=\dfrac{\gamma R^2}{h}\left[\dfrac{1+\sin\alpha+\sin^2\alpha}{3(1+\sin\alpha)}-0.355\right]$

$\sigma_\theta=\dfrac{\gamma R^2}{h}(\sin\alpha-0.707)-\sigma_\phi$

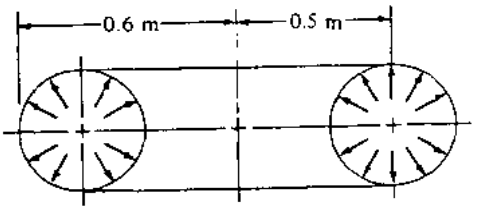


图 10-18

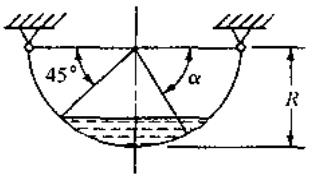


图 10-19

10.22　图 10-20 画的是球壳的一部分．惟一的载荷是其自身重量，记为壳体中面每单位面积 q．壳体的内半径为 r，其下边圈用不能传递弯曲效应的滚动圆柱支撑．求壳体内的径线和圆周应力．（提示：用角度 ϕ 表示壳体上任何点的位置）

答案：$\sigma_\phi=\dfrac{-qr}{h(1+\cos\phi)}$；$\sigma_\theta=\dfrac{qr}{h}\left(\dfrac{1}{1+\cos\phi}-\cos\phi\right)$

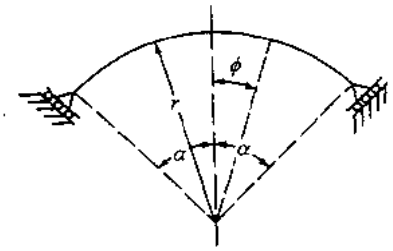


图 10-20

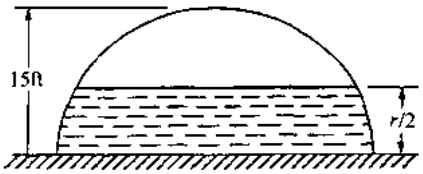


图 10-21

10.23　一半球形的储水罐与底板刚性连接，如图 10-21 所示．罐的内半径为 15 ft，壁厚 0.05 in．罐内储水深度为 $r/2$．求距底板 $r/4$ 处的径线和圆周应力．

答案：$\sigma_\phi=4014\ \text{lb/in}^2$；$\sigma_\theta=1840\ \text{lb/in}^2$

10.24　一内半径 1 m，长 5 m，壁厚 $h=20$ mm 的圆柱压力容器由工作应力为 250 MPa 的高强度钢材构成，钢的 $E=210$ GPa，$\mu=0.3$．容器起初注入体积模量为 2100 MPa 的不受压缩的水。问需要增加多少水才能将压力增至 5 MPa？

答案：0.0561 m^3

10.25　假设例题 10.21 中的半球形容器注满了液体（图10-22）．求由该载荷引起的壳体内的应力．

答案：$\sigma_\phi=\dfrac{\gamma R^2}{3h}\left(\dfrac{1-\cos^3\phi}{\sin^2\phi}\right)$；

$\sigma_\theta=\dfrac{\gamma R^2}{3h}\left(3\cos\phi-\dfrac{1-\cos^3\phi}{\sin^2\phi}\right)$

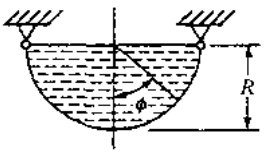


图 10-22

第十一章　扭　　转

若一根杆受在垂直于杆的轴线平面内的力矩(扭矩)$\boldsymbol{T}$ 的作用,使杆的两端引起方向相反的转动(如图 11-1(a)或(b)所示),我们说此杆受扭转.我们通常也说杆承受扭转力矩 $\boldsymbol{T}$ 的作用.

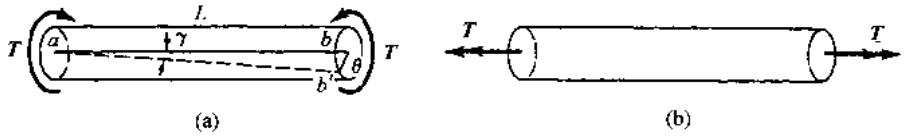


图 11-1

扭转剪切应力

不论是实心的还是空心圆轴在扭转力矩 $\boldsymbol{T}$ 的作用下,在距轴的中心线径向距离为 ρ 的地方的扭转剪切应力 τ 为

$$\tau = \frac{T\rho}{J} \tag{11.1}$$

式中 $T=|\boldsymbol{T}|$,而 J 是称为极惯性矩的参数,其定义在下面给出.上式是这样导出的:对图 8-1 中的长方体微元应用平衡微分方程,同时利用适当的几何关系,这些关系是在杆原先的平截面在承受扭转载荷后仍然保持为平面的假设下得到的.

式(11.1)中的应力 τ 呈线性变化,在轴心处(如果是实心的)为零,在最外层达到最大值,如图 11-2(a)所示;空心轴的应力分布如图 11-2(b)所示.图 11-2 的两种情况都假定载荷的作用在材料的弹性范围内.最常用的剪切应力单位在 SI 制中是兆帕,而在 USCS 制中是每平方英寸磅.

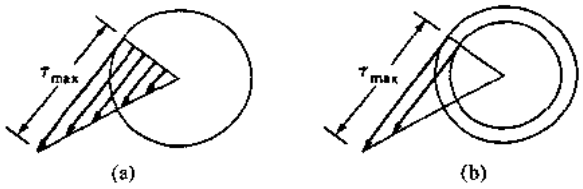


图 11-2

极惯性矩

对于外径为 D_o 内径为 D_i 的空心圆轴,其横截面的**极惯性矩**为

$$J = \frac{\pi}{32}(D_o^4 - D_i^4) \tag{11.2}$$

令 $D_i=0$ 就得到直径为 D 的实心圆轴的**极惯性矩**

$$J = \frac{\pi D^4}{32} \tag{11.3}$$

J 的单位为长度的四次方,而长度的单位在 SI 制中为米,在 USCS 制中为英寸.

剪切应变

如图 11-1(a)所示，在未径扭转的杆的表面上有一条母线 a-b，在施加扭转力矩 $\boldsymbol{T}$ 之后，这条线移动到 a-b' 位置. 母线初始位置和最终位置所夹之角 γ(用弧度表示)定义为由 $\boldsymbol{T}$ 引起的杆表面的剪应变. 类似的定义对杆内部所有的母线也成立.

剪切弹性模量

剪切应力 τ 与剪切应变 γ 之比称为剪切弹性模量 G，即 $G=\tau/\gamma$. G 的单位与剪切应力的单位相同，因为剪切应变是无量纲的.

扭转角

若一根长 L 的轴在它整个长度上承受恒定的扭转力矩 $\boldsymbol{T}$ 的作用，其一端相对另一端扭转的角度 θ 为

$$\theta=\frac{TL}{GJ} \tag{11.4}$$

θ 的单位为弧度.

单位长度轴的扭转角为

$$\varphi=\frac{\theta}{L}=\frac{T}{GJ} \tag{11.5}$$

动力传递

一根在扭转力矩 $\boldsymbol{T}$ 的作用下以恒定角速度 ω(每秒弧度)转动的轴能传递动力 $P=\boldsymbol{T}\omega$. 或者，用每秒的转数 f 来表示，传递的动力为 $P=2\pi fT$.(见例题 11.6 至 11.8)

机算机解

对于一根变直径圆截面杆，在求解扭转角 θ 时将杆沿长度方向分成很多段，在每一段上杆的直径可以认为是恒定的. 这种处理方法最适合计算机来执行. 在例题 11.9 中给出了解这一类问题的 FORTRAN 程序.(也可参阅例题 11.10)

圆杆的弹塑性扭转

当作用在实心或空心的圆杆上的扭转力矩值不断增大时，最终会达到这样一个值，此时杆的最外层处于材料的剪切曲服点. 这就是杆所能承受的最大弹性扭转力矩，记为 T_e.

若扭转力矩的值继续增大，将使杆的内层也达到曲服点，从而使曲服过程由外层向内层发展. 极限的情况出现在所有内层的应力都达到了剪切曲服时，此时的扭转力矩称为完全塑性扭转力矩，记为 T_p. 只要不考虑超过剪切曲服点的应力，这就是杆所能承受的最大扭转力矩. 对于承受扭转的实心圆杆，例题 11.11 证明其 $T_p=4T_e/3$.(也可参阅例题 11.12)

例　题

11.1　所谓的"扭杆"经常使用在高性能汽车上用来提高驾驶性能. 杆的一端通常通过一个支架与底盘框架相连，而另一端与前轮悬架连接. 杆的两端都开有键槽，但键槽位置特意是错位的，这样在安装时就会在杆内产生应力. 在某一情况下，需要将杆的一端相对另一端扭转 15°才能将杆安装上. 杆长 52 in，实心圆截面，直径 1.25 in，材料为 $G=12\times10^6$ lb/in 的钢材，求杆内产生的最大扭转剪切应力.

解　由式(11.3)，横截面的极惯性矩为

$$J = \frac{\pi}{32}(1.25\ \text{in})^4 = 0.239\ \text{in}^4$$

然后由式(11.4),有

$$(15^\circ)\frac{1\text{rad}}{57.3^\circ} = \frac{T(52\ \text{in})}{(12\times10^6\ \text{lb/in}^2)(0.239\ \text{in}^4)}$$

由上式解得 $T = 14\ 400\ \text{lb}\cdot\text{in}$.

由式(11.1)可求得杆的最外层剪切应力为

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{(14\ 400\ \text{lb}\cdot\text{in})(0.625\ \text{in})}{0.239\ \text{in}^4} = 37\ 700\ \text{lb/in}^2$$

11.2 一根圆截面杆(图 11-3)一端固结一端自由,其所承受的扭转力矩载荷沿杆的长度 L 均匀分布.杆的扭转刚度为 GJ(即杆的极惯性矩为 J,剪切弹性模量为 G).求杆的自由端的扭转角.

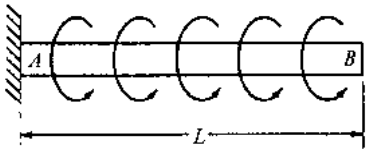


图 11-3

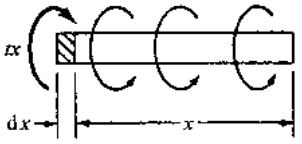


图 11-4

解 设每单位杆长扭转力矩的强度为 t.引入 x 坐标,其原点在杆的右端且正值指向左侧.图 11-4 为长度为 dx 的微元段右侧一段杆的分离体图.在该截面上的扭转力矩为 tx,所以由式(11.4)在 dx 长度上的扭转角 $d\theta$ 为

$$d\theta = \frac{tx\,dx}{GJ}$$

杆的 B 端相对于 A 端的整个转动可通过将上式沿整个长度 L 积分而求得

$$\theta_{B/A} = \int_{x=0}^{x=L}\frac{tx\,dx}{GJ} = \frac{tL^2}{2GJ} \tag{1}$$

11.3 如图 11-5 所示,实心杆 ABC 的横截面是圆的.在杆左侧 300 mm 的长度上均匀分布着扭转力矩,在自由端 C 受一 80 N·m 的集中扭转力矩作用.杆是钢杆,其 $G = 84$ GPa,直径 15 mm.求 C 端的扭转角和杆上最大的扭转剪切应力.

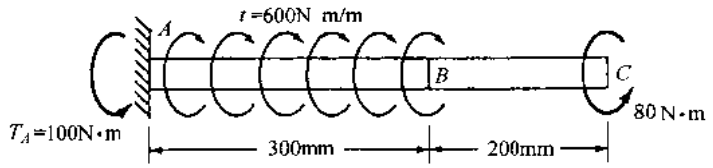


图 11-5

解 如图 11-5 所示,固定端的约束反扭矩可由静力学立即求得为 100 N·m.反映扭转力矩沿杆长变化的扭矩图如图 11-6 所示,图中从杆的 C 端顺轴向 A 端看时顺时针扭矩取为正值.

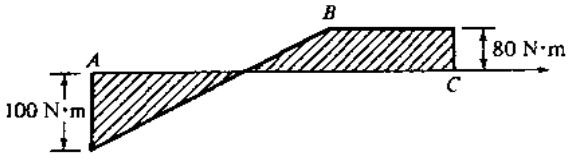


图 11-6

利用例题 11.2 的式(1)

$$\theta_{B/A} = \frac{(600\ \text{N}\cdot\text{m/m})(0.3\ \text{m})^2}{2GJ} = \frac{27}{GJ}$$

于是,由于分布扭矩的作用,杆的 BC 段像刚体那样转过一个角度 $27/GJ$.

80 N·m 的集中扭矩的效果是在 C 端产生一个扭转角

$$\theta_{C/A} = \frac{TL}{GJ} = \frac{(80\text{N}\cdot\text{m})(0.5\text{m})}{GJ} = -\frac{40}{GJ}$$

于是 C 端的净扭转角为 $(27-40)/GJ = -13/GJ$,式中的负号表示逆时针转动.若 $G=84$ GPa,J 由式(11.3)给出,则

$$\theta_C = \frac{-13}{GJ} = -\frac{13\ \text{N}\cdot\text{m}^2}{(84\times10^9\ \text{N/m}^2)(\pi/32)(0.015\ \text{m})^4}$$

$$= -0.031\ \text{rad}\ 或\ -1.78^\circ$$

由图 11-6 显见,扭矩峰值出现在固定端 A,大小为 100 N·m.在 A 端杆的最外层,扭转剪切应力的峰值为

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho}{J} = \frac{(100\ \text{N}\cdot\text{m})(0.0075\ \text{m})}{(\pi/32)(0.015\ \text{m})^4}$$

$$= 150.9\times10^6\ \text{N/m}^2 = 150.9\ \text{MPa}$$

11.4　一根复合材料轴由一根直径 2 in 的铝棒($G=4\times10^6$ lb/in^2)外包一根空心圆钢管构成,管的外径 2.5 in 内径 2 in,$G=12\times10^6$ lb/in^2.两种金属在连接处刚性连结.若复合材料轴承受 14 000 lb·in 的扭转力矩作用,求钢管最外层以及铝棒最外层的剪切应力.载荷作用在两种金属的弹性范围内.

解　设铝轴承受的扭矩为 T_1,钢管承受的扭矩为 T_2.由对轴的轴线的力矩静平衡,有

$$T_1 + T_2 = 14\ 000\ \text{lb}\cdot\text{in}$$

这是本题所能列出的惟一静力平衡方程.由于包含两个未知数 T_1 和 T_2,必须要根据轴的变形补充一个方程.

这样的方程不难找到.因为两种金属材料刚性固接,它们的扭转角必相等.在轴长 L 上,利用公式 $\theta = TL/GJ$,有

$$\frac{T_1L}{(4\times10^6)(\pi/32)(2)^4} = \frac{T_2L}{(12\times10^6)(\pi/32)[(2.5)^4-(2)^4]}\ 或\ T_1 = 0.231T_2$$

将此方程与静力平衡方程联立求解,可得 $T_1=2600$ lb·in 和 $T_2=11400$ lb·in.

由式(11.1),钢管和铝棒最外层的剪切应力分别为

$$\tau_2 = \frac{11400\ (1.25)}{(\pi/32)[(2.5)^4-(2)^4]} = 6300\ \text{lb/in}^2\ 和$$

$$\tau_1 = \frac{2600(1)}{(\pi/32)(2)^4} = 1650\ \text{lb/in}^2$$

11.5　一根台阶形圆截面轴(图 11-7)于 A 和 D 两端固结,在 B 和 C 两点作用有扭转力矩 $T_1=1000$ N·m 和 $T_2=1500$ N·m.轴是钢材的,其 $G=84\times10^9$ N/m^2,轴长 L 为 500 mm,AB 和 CD 两段的直径为 30 mm,BC 段的直径为 50 mm.求 C 点的扭转角和扭转剪切应力峰值.

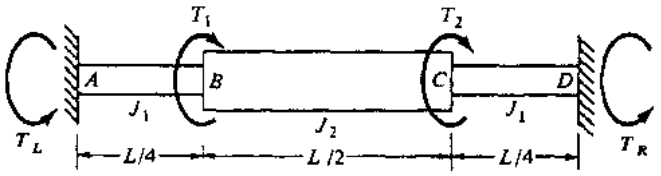


图 11-7

解　轴的左、右端约束反扭矩在图中分别设为 T_L 和 T_R,且作用方向设为如图所示.图 11-8 是

反映扭转力矩沿轴长变化的扭矩图，图中从 D 端向 A 端看时顺时针方向的扭矩取为正值.

由扭矩对轴的纵轴的静力平衡，可得

$$T_1 + T_2 - T_L - T_R = 0 \tag{1}$$

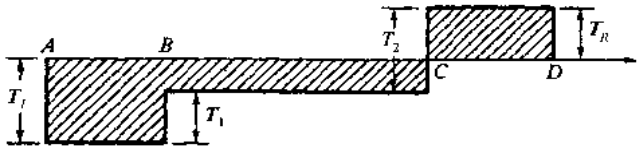


图 11-8

这是惟一可以列出的静力平衡方程，它包含两个未知量 T_L 和 T_R. 于是该系统是静不定，必须在考虑变形的基础上补充方程. 利用关系式 $\theta = TL/GJ$，计算杆上不同部分的扭转角可得到这样一个方程：

$$\theta_{B/A} = \frac{T_L L/4}{GJ_1}, \quad \theta_{C/B} = \frac{(T_L - T_1)L/2}{GJ_2}, \quad \theta_{C/D} = \frac{T_R L/4}{GJ_1}$$

由于 A 和 D 两端固定，所以截面 C 相对 A 端扭转的角度必等于其相对 D 端扭转的角度，故有

$$\frac{T_L L}{4GJ_1} + \frac{(T_L - T_1)L}{2GJ_2} = \frac{T_R L}{4GJ_1}$$

或

$$T_L = \frac{2T_1 J_1 + T_R J_2}{J_2 + 2J_1} \tag{2}$$

由给定的数值，式(11.3)可得

$$J_1 = \frac{\pi(0.030\ \text{m})^4}{32} \text{ 和 } J_2 = \frac{\pi(0.050\ \text{m})^4}{32}$$

故式(2)变为

$$T_L = \frac{2(1000)(0.030)^4 + T_R(0.050)^4}{(0.050)^4 + 2(0.030)^4} = 205.8 + 0.794\ T_R$$

将上面结果代入式(1)，解得 $T_L = 1221\ \text{N·m}$ 和 $T_R = 1278\ \text{N·m}$. 于是 C 点的扭转角为

$$\theta_{C/D} = \frac{(1278\ \text{N·m})(0.125\ \text{m})}{(84 \times 10^9\ \text{N/m}^2)(\pi/32)(0.030)^4} = 0.0239\ \text{rad 或 } 1.37^\circ$$

图 11-8 表明，因为 $T_R > T_L$，剪切应力峰值出现在 CD 段的最外层，峰值大小由式(11.1)确定：

$$\tau_{\max} = \frac{T\rho}{J} = \frac{(1278\ \text{N·m})(0.015\ \text{m})}{(\pi/32)(0.030\text{m})^4}$$

$$= 241 \times 10^6\ \text{N/m}^2 = 241\ \text{MPa}$$

11.6 一根轴以恒定角速度 ω 转动. 推导作用于轴上的扭转力矩 T 与轴所传递的动力 P 之间的关系式，假设作用在弹性范围内.

解 涉及转动的公式可以由角速度 ω 表示，单位为每秒弧度，或者由频率 f 表示，单位为每秒转数或赫兹，因为 $\omega = 2\pi f$. 动力的单位也有相应的表示法.

在一秒钟内，扭转力矩 T 做的功为(根据定义)矩的大小与以弧度表示的角位移之积. 因为功率 P 为单位时间内所做之功，故有

$P = T\omega$（ω 为每秒弧度）

$P = 2\pi fT$（f 为每秒转数或赫兹）

在 SI 单位制中，	在 USCS 单位制中，
T 为牛顿·米	T 为磅·英寸
P 为每秒牛顿·米或瓦	P 为每秒磅·英寸或马力
(1 N·m/s = 1 W)	(6600 lb·in/s = 1 hp)

使用 SI 单位制时必须清楚，1 N·m = 1 J(焦耳)和 1 W = 1 J/s.

11.7　一根实心圆钢轴用来在每分钟 900 转 (rpm)的转速下传递 40 kW 的功率. 在 $G=80$ GPa, 工作剪应力为 20 MPa 的条件下求轴的最小直径.

解　以转动频率 f 表示的传递功率为 $P=2\pi fT$. 于是有

$$40\ 000\ \text{N}\cdot\text{m/s} = 2\pi(900\ \text{rpm})\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}T$$

可解得 $T=424$ N·m.

剪切应力峰值出现在最外层, $\rho=D/2$. 由式(11.1)

$$\tau_{\max}=\frac{T\rho}{J}=\frac{TD/2}{\pi D^4/32}=\frac{16T}{\pi D^3} \tag{1}$$

代入 $\tau_{\max}=20\times10^6$ N/m^2 和 $T=424$ N·m, 由上式可得

$$D = 0.0475\ \text{m 或 } 47.5\ \text{mm}.$$

11.8　一根实心圆钢轴用来在每分钟 900 转的转速下传递 55 马力的功率. 在 $G=12\times10^6$ lb/in^2 和允许的工作剪切应力为 2 900 lb/in^2 的条件下, 求轴的最小直径.

解　将已知条件代入方程 $P=2\pi fT$, 得

$$55(6\ 600\ \text{lb}\cdot\text{in/s}) = 2\pi(900\ \text{rpm})\frac{1\ \text{min}}{60\ \text{s}}T$$

解出 $T=3850$ lb·in.

剪切应力峰值出现在轴的最外层, $\rho=D/2$. 由例题 11.7 的式(1)可写出

$$\tau_{\max}=\frac{16T}{\pi D^3}\ \text{或}\ 2900\ \text{lb/in}^2=\frac{16(3850\ \text{lb}\cdot\text{in})}{\pi D^3}$$

解上式得 $D=1.89$ in.

11.9　如图 11-9 所示, 一根圆截面杆的直径沿长度 L 变化, 杆的两端受扭转载荷作用. 直径的变化规律可以用解析式表示, 或者沿杆的轴线选取一些位置进行测量而得知. 要求编写一个 FORTRAN 程序求解杆的一端相对另一端的扭转角.

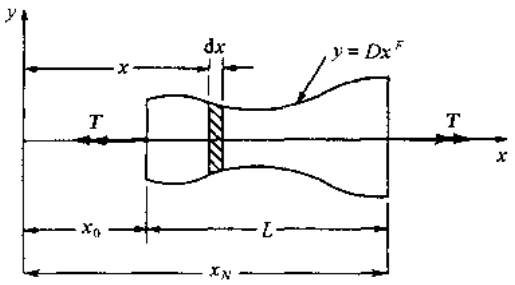


图 11-9

解　式(11.4)不能应用于杆的整个长度 L 上, 因为该式是在恒截面圆杆的假设下导出的. 然而我们可以将杆沿长度方向分成很多小段, 在每一小段上横截面可以认为是恒定的. 若图 11-9 中杆的轮廓线方程为 $y=f(x)$, 我们可以将杆的长度分割成无限小的微段, 每个微段的长度为 $\mathrm{d}x$, 在每一微段上横截面认为是不变的, 然后对所有的微段应用公式 $\theta=TL/GJ$, 再用积分法将所有的结果加起来. 假如杆是由有限数量的分段构成而每一分段的直径已经测得, 我们可以利用这些测得的直径求得所有分段上的扭转角再求和.

这一处理方法体现在下面的 FORTRAN 程序中. 该程序可用于截面任意变化的圆杆, 而程序中涉及到的各种参数都标注在图 11-9 中. 注意, 在描述杆的形状的方程 $y=DX^E$ 中, E 是幂指数而不是弹性模量. 程序中假设杆对于其纵轴是对称的; 如果是用测量方法给出杆的轮廓线, 则测量点的间距必须要相等.

```
00020C    PROGRAM TORSION1 - - - - TORSION OF A VARIABLE RADIUS SOLID
00030C                             CIRCULAR CROSS-SECTION BAR
00040C
00050C    THE BAR HAS LENGTH L,SHEAR MODULUS G,IS DIVIDED INTO N
00060C    SEGMENTS ALONG THE TOTAL LENGTH,AND IS LOADED BY A TORQUE T
00070C    WHICH IS CONSTANT ALONG THE BAR LENGTH.
00080C    THE RADIUS MAY BE DESCRIBED EITHER ANALYTICALLY AS R = R(X)
00090C    WHERE X IS THE GEOMETRIC AXIS OF THE BAR,OR NUMERICALLY USING
00100C    THE MAGNITUDE OF R AT EACH END OF THE N SEGMENTS,MEANING AN
00110C    INPUT OF N + 1 VALUE. THESE ARE THE CASES IN LINE 00230.
00120C
00130     DIMENSION A(101),C(101)
00140     PRINT * ,' ENTER TOTAL LENGTH OF SHAFT'
00150     READ ( * , * ) L
00160     PRINT * ,' ENTER THE SHEAR MODULUS'
00170     READ ( * , * ) G
00180     PRINT * ,' ENTER THE TORQUE'
00190     READ ( * , * ) T
00200     PRINT * ,' DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE SHAFT ?'
00210     PRINT * ,' ENTER 1:YES;  2:NO'
00220     READ ( * , * ) YON
00230     IF (YON. EQ. 2. ) GO TO 10
00240     PRINT * ,' F(X) = D * X * * E'
00250     PRINT * ,' ENTER D,E'
00260     READ ( * , * ) D,E
00270     PRINT * ,' ENTER THE COORDINATE OF BOTH ENDS IN X-AXES'
00280     READ ( * , * ) XO,XN
00290     ANG = 2. * T/(3.14159 * G * ( - 4. * E + 1. ) * D * * 4. ) * (XN * * ( - 4. * E + 1. ) - XO * *
          ( - 4. * E + 1. ))

00300     GO TO 40
00310     10 PRINT * ,'ENTER NO. OF SECTIONS TO BE CALCULATED'
00320     READ ( * , * ) N
00330     PRINT * ,' ENTER THE RADII OF THE ENDS FOR SECTION 1 TO N'
00340     DO 20 I = 1,N + 1.
00350     20 READ ( * , * ) A(I)
00360     ANG = 0.
00370     DO 30 I = 1,N
00380     C(I) = (32. * T * L/N)/(3.14159 * G * ((A(I) + A(I + 1)) * * 4))
00390     30 ANG = ANG + C(I)
00400     40 DEGRE = ANG * 180/3.14159
00410     PRINT 100,ANG
00420     PRINT 200,DEGRE
00430     100 FORMAT (/,5X,'THE ANGLE OF TWIST AT END IS ',F9.5,'RADIANS')
00440     200 FORMAT (/,5X,'                              OR ',F9.5,'DEGREES')
00450     END

READY.
```

11.10 一根实心圆截面杆处于 x 轴位置，从 $x=50$ in 到 $x=75$ in 杆的轮廓线由方程 $x=150\,y^{2.5}$ 描述. 杆材的剪切模量为 $12\times 10^6 \text{lb/in}^2$，杆的每一端承受 6000 lb·in 的扭转力矩. 利用例题 11.9 中的 FORTRAN 程序，求两端之间的扭转角.

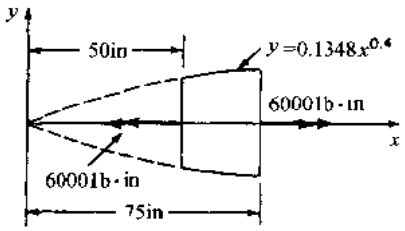


图 11-10

解 首先需要将轮廓线方程重写成 $y=Dx^E$ 形式，因为在程序中它是以这种形式出现的. 将题目的方程式两边除以 150 再开 2.5 次方即可完成形式的改变，结果是

$$y=\frac{x^{1/2.5}}{150^{1/2.5}}=\frac{x^{0.4}}{150^{0.4}}=0.1348x^{0.4}$$

如图 11-10 所示，该图也包括所需的输入数据，计算机的运行(包括对提示的回答)如下：

```
ENTER THE TOTAL LENGTH OF THE ROD (IN M OR INCHES):
? 25
ENTER THE SHEAR MODULUS (IN PASCALS OR PSI):
? 12E+6
ENTER THE UNIFORM TORQUE (IN N-M OR LB-IN):
? 6000
DO YOU KNOW THE FUNCTION DESCRIBING THE ROD?
ENTER 1--YES;2--NO
? 1
F(X)=D*(X**E)
ENTER D,E;
? 0.1348,0.4
ENTER THE X-COORDINATE FOR BOTH ENDS OF THE ROD:
(IN M OR INCHES):
? 50,75
THE ANGLE OF TWIST IS:1.929 DEGREES
```

11.11 一根实心圆截面杆承受扭转作用. 杆材认为是完全弹塑性的，也就是说，其剪切应力-应变关系如图 11-11(a)所示. 求：(1)塑性变形开始形成的地方距轴心的距离(用扭转力矩表示)，(2)当整个横截面都呈现塑性变形时的扭转力矩.

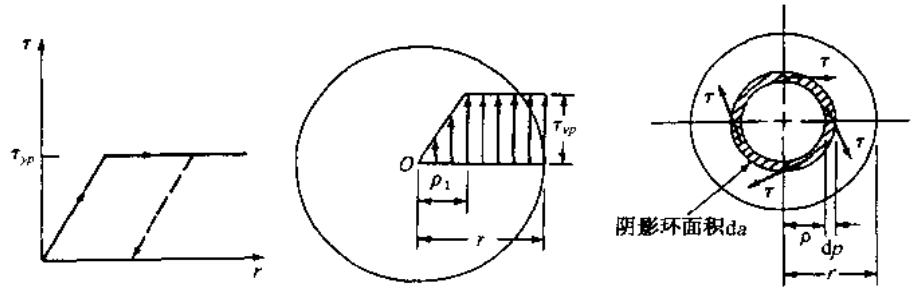


图 11-11

解 即使扭转作用已使杆的外层达到屈服点，我们仍然可以假设在加载之前垂直于轴线的截平面在施加扭转之后仍保持为平面，并且在该截面上变形之前的直径变形后仍为直径，或者说，该直径仍为直线. 这一假设是附合实际的. 所以，纵向层面的剪切应变从杆的轴心开始随距离增加呈线性变化.

设塑性变形开始的地方距杆的轴心距离为 ρ_1，则截面上应力分布如图 11-11(b)所示. 于是，从轴心 O 开始直到 ρ_1，剪切应力随距离 ρ 呈线性变化，过了 ρ_1 则剪切应力为恒值且等于剪切应力曲服点.

由图 11-11(b)，当 $\rho<\rho_1$ 时有

$$\frac{\tau}{\rho}=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1} \text{ 或 } \tau=\frac{\rho}{\rho_1}\tau_{yp}$$

当 $\rho>\rho_1$ 时，$\tau=\tau_{yp}=$常数.

作用在整个截面上的所有剪切应力之矩可以通过分析图 11-11(c)中带阴影线的薄圆环而求得. 在距轴心为 ρ 的地方的剪切应力为 τ，该剪切应力作用在圆环面积 da 上. 该应力对轴心之矩为 $\tau\rho da$，而作用在从轴心到杆最外层所有这样的圆环上的剪切应力之矩的和为 $\int_0^r\tau\rho da$. 由于要保持平衡，该合力矩必等于所施加的扭转力矩 T，故有

$$T=\int_0^r\tau\rho da.$$

对于上面已求得的剪切应力的值，上式可写成

$$T=\int_0^{\rho_1}\frac{\rho}{\rho_1}\tau_{yp}\rho da+\int_{\rho_1}^r\tau_{yp}\rho da=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\rho^2 da+\tau_{yp}\int_{\rho_1}^r\rho da$$

$$=\frac{\tau_{yp}}{\rho_1}\int_0^{\rho_1}\rho^2 2\pi\rho d\rho+\tau_{yp}\int_{\rho_1}^r\rho 2\pi\rho d\rho=\tau_{yp}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2\pi}{3}\right)\rho_1^3+\frac{2\pi}{3}\tau_{yp}r^3.$$

解上式可得

$$\rho_1=\left(4r^3-\frac{6T}{\pi\tau_{yp}}\right)^{1/3} \tag{1}$$

这就是塑性变形开始的地方距轴心的距离对于全截面呈塑性变形的情况，即在截面的所有点上 $\tau=\tau_{yp}$，令 $\rho_1=0$，则可得产生全塑性变形的扭转力矩 T_p：

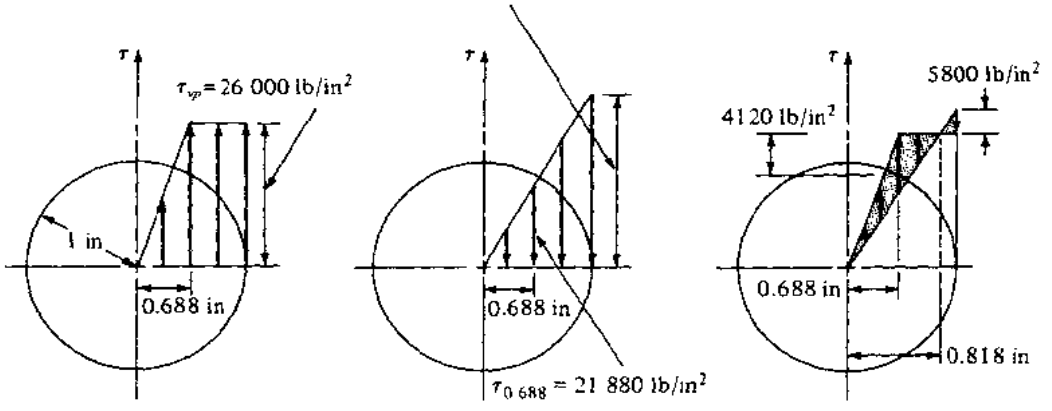
$$T_p=\frac{2}{3}\pi r^3\tau_{yp} \tag{2}$$

但是，若只有杆的最外层应力达到材料的曲服点而所有内层仍在弹性作用范围内，则最大的弹性扭转力矩 T_e 为

$$T_e=\frac{\tau_{yp}}{2}\pi r^3 \tag{3}$$

比较式(2)和式(3)可知 $T_p=4T_e/3$；也就是说，产生全塑性变形的扭转力矩比只在杆的最外层产生塑性变形的扭转力矩大 $33\frac{1}{3}\%$.

11.12 50 000 lb·in 的扭转力矩作用在一根直径 2 in 的轴上，轴材的剪切应力曲服点为 26 000 lb·in^2. 求：(1)弹塑性边界距轴心的距离；(2)在扭转载荷卸载后，留在轴内剩余剪切应力的分布.



(a) 弹塑性　(b) 弹性卸载　(c) 残余扭应力

图 11-12

解 由例题 11.11 的式(1),有

$$\rho_1 = \left[4(1\text{ in})^3 - \frac{6(50\,000\text{ lb}\cdot\text{in})}{\pi(26\,000\text{ lb/in}^2)}\right]^{1/3} = 0.688\text{ in}$$

这就是弹塑性边界的半径.扭转剪切应力的分布如图 11-12(a)所示

$$\tau = \frac{16T}{\pi D^3} = \frac{16(50\,000)}{\pi(2)^3} = 31\,800\text{ lb}\cdot\text{in}^2$$

当外加扭转力矩卸载后,材料根据图 11-11(a)中的虚线"松弛"了.这种线性卸载具有的应力分布如图 11-12(b)所示,该图中的纵坐标可由式(11.1)确定,因为扭转应力在弹性范围内.

为求得最终的应力状态,即卸载后的残余应力,我们只需将图 11-12(a)和(b)两图的应力状态叠加,得到如图 11-12(c)所示的应力状态.该图很清楚地显示,一部分剩余应力产生顺时针力矩,而另一部分产生反时针力矩.这是必然的,因为在载荷卸载后整个截面上的净扭矩必须为零.

补充习题

11.13 如图 11-13 所示,一根复合轴由直径为 30 mm 的实心铝棒($G=27$GPa)与一外径为 30 mm 的空心黄铜柱体($G=39$GPa)刚性连接而成.若轴上黄铜部分单位长度的扭转角仅为铝材部分的 80%,求黄铜柱体的内径.

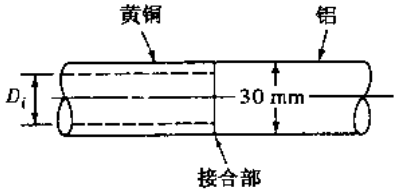


图 11-13

答案:18.2 mm

11.14 如图 11-14 所示,一根水平轴上有三个滑轮用键与之连接.整个系统重量不计.轴在图示皮带的牵引下以恒定角速度旋转.若轴的工作剪切应力为 9500 lb/in^2,求所需的轴的直径.(轴的弯曲可忽略不计).

答案:$D=0.99$ in$\approx$1 in

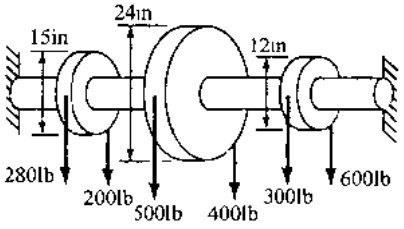


图 11-14

11.15 一根实心圆截面轴直径为 1.375 in,承受 3500 lb·in 的扭矩而在 6 ft 的长度上产生 3.5°的扭转角.求材料的剪切模量.

答案:$G=11.76\times10^6$ lb/in^2

11.16 一根实心圆轴从一端到另一端略微呈均匀圆锥形.小的一端半径为 a,大的一端半径为 b.利用积分方法求长度 L 上的扭转角.

答案:$\dfrac{2TL}{3G\pi(b-a)}\left(\dfrac{1}{a^3}-\dfrac{1}{b^3}\right)$

11.17 一根台阶形实心圆截面轴承受均匀分布在轴右半段的扭转力矩作用,如图 11-15 所示.轴上细的部分 BC 的极惯性矩为 J_1,粗的部分 AB 的极惯性矩为 $1.5J_1$.求自由端 C 的扭转角.

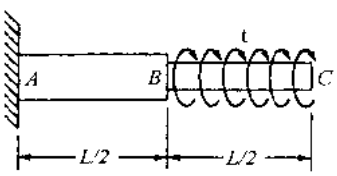


图 11-15

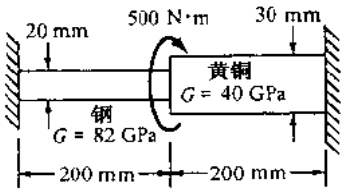


图 11-16

答案：$\frac{7}{24}tL^2/GJ_1$

11.18 如图 11-16 所示的复合实心圆轴的钢材段和黄铜段两端固接，连接处用铜焊焊死．轴承受 500 N·m 扭转力矩的作用．求每一种材料中最大的扭转剪切应力．

答案：钢材中 91.5MPa；黄铜中 67MPa

11.19 一根实心圆钢轴在每分钟 1800 转的转速下传递 22 kW 的功率，求其最小直径．取 G 为 80 GPa，最大允许的剪切应力为 24 MPa．

答案：29 mm

11.20 一根实心圆钢轴在每分钟 1000 转的转速下传递 45 kW 的功率，求其直径．若每米的允许扭转角不得超过 1.0°．取 $G=80$ GPa．

答案：42 mm

11.21 一根外径 50 mm，内径 30 mm 的空心钢轴以每分钟 900 转的转速转动．若剪切应力峰值不超过 65 MPa，求其所能传递的最大功率．

答案：131 kW

11.22 一根实心圆截面轴沿 x 轴放置，其轮廓线由方程式 $x=100y^2$ 描述．轴从 $x=1$ m 延伸至 $x=1.5$ m，其剪切模量 $G=80$ GPa．在轴的两端分别作用有 157 kN·m 的扭转力矩．利用例题 11.9 中的 FORTRAN 程序求轴的一端相对另一端的扭转角．

答案：0.239°

11.23 一根圆锥形实心轴从 $x=200$ mm 延伸至 $x=600$ mm，且两端的半径分别为 40 mm 和 60mm，如图 11-17 所示．在每一端均作用有 4000 N·m 的扭转力矩．若剪切模量 $G=80$GPa，利用例题 11.9 中的 FORTRAN 程序求一端相对另一端的扭转角．

答案：0.732°

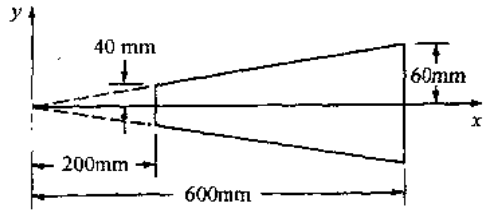


图 11-17

11.24 一根实心圆钢轴的直径为 1.60 in，承受 28000lb·in 的扭转力矩作用．材料的剪切应力曲服点为 27 000 lb/in^2．求形成的圆形弹性区和塑性区边界的半径．

答案：0.41 in

11.25 在 11.24 题中，若 28 000 lb·in 的扭转力矩完全卸载，求残余应力的分布．

答案：如图 11-18 所示

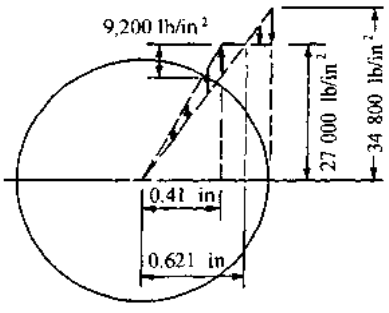


图 11-18

第十二章 梁中的应力

梁

梁是一根细长的杆，作用于梁上的力和力偶与杆的纵轴线同在一个平面内，且作用力的方向与梁的纵轴线垂直.我们假设梁是由大量的纵向纤维层构成的，每一层纤维不是受拉就是受压.我们同时还假设相邻纤维层之间不存在横向压力，所以每一层纤维受力情况与其他层面无关.更进一步，我们假设力和力偶的作用平面是梁横截面的对称面，并且梁垂直于纵轴线的横截面在受载变形后仍保持平面和垂直于纵轴线.

中性轴

在任何梁中存在一纵向层面，该层面的纤维不承受任何拉伸或压缩.这一层面称为梁的中性面.

梁的中性面与垂直于梁纵轴线的横截面的交线称为梁的中性轴(N.A.).处于中性轴某一侧的所有纤维层受拉伸，面处于另一侧的所有纤维层受压缩.

弯矩和剪切力

在本书第七章中定义和讨论的这两个概念，也同样适用于梁.

梁的弹性弯曲

下面的论述仅适用于这样的情况，即梁上所有纤维层所受的应力都在构成该梁材料的线弹性范围内.

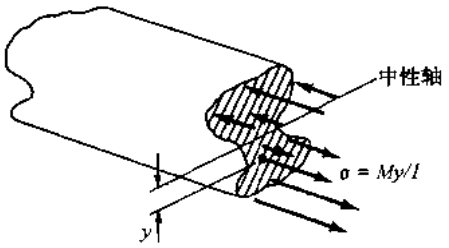


图 12-1

法向应力

有可能通过例题 8.20 中的应力函数(9)且令其中的 $A_3=B_3=C_3=0$，来表示梁的纵向应力(对中性面的某一侧或另一侧，受拉伸或压缩.将这样设定的应力函数代入该例题的式(3)，得

$$\sigma_x = \frac{\partial^2(D_3y^3)}{\partial y^2} = 6D_3y \qquad (12.1)$$

由于所有纵向应力对于中性轴之矩等于弯矩 $\boldsymbol{M}$，故必有

$$\sigma_x = \sigma = \frac{My}{I} \qquad (12.2)$$

式中 $M=|\boldsymbol{M}|$；I 为横截面对中性轴的惯性矩，其计算方法在第六章中已经介绍；y 为纵向纤维距中性轴的距离.

由式(12.2)显见，法向应力的大小随距离 y 呈线性变化.对于一个导致在中性轴下方出现拉应力而在其上方出现压应力的弯矩，法向应力的分布如图 12-1 所示.由于该图中整个横截面上的法向应力保持平衡，中性轴必定通过横截面的形心.

截面模量

梁的最外层纤维的 y 坐标值(本书中以向下为正)通常记为 c.在这种情况下最大的法向应力为

$$\sigma_{max} = \frac{Mc}{I} = \frac{M}{I/c}. \tag{12.3}$$

比值 I/c 称为横截面的截面模量，通常记为 Z. 其单位为长度的三次方. 最大的弯应力可以表示成

$$\sigma_{max} = M/Z \tag{12.4}$$

上式使用较方便，因为很多常见结构形状的 Z 值在结构手册中都列表供查(见例题 12.1)

剪切应力

一根承受垂直剪切力 V 作用的水平梁中既有垂直的也有水平剪切应力 τ 存在. 梁上任何横截面总的垂直应力就是 V.

对于具有如图 12-2 所示矩形截面的梁，假设作用力作用在垂直对称面(a-a)内，则在距中性轴距离为 y_0 的纤维层上剪切应力为

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\mathrm{d}A \tag{12.5}$$

式中 b 为所求剪切应力之处梁的宽度. 上式中的积分表示图 12-2 中带阴影的面积对于中性轴的第一类矩(见第六章). 更精确地说，该积分表示梁上这样一部分截面对中性轴的第一类矩，即所求应力 τ 所在的水平面与梁的最外层纤维之间的截面. 而且式(12.5)给出的是 y_0 处垂直和水平剪切应力两种应力.

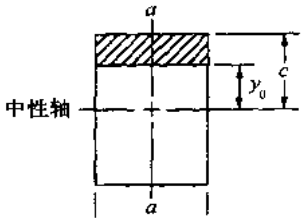


图 12-2

由式(12.5)可清楚地看出，剪切应力峰值出现在中性轴上，而最外层纤维的剪切应力为零. 这一点与式(12.2)确定的法向应力分布恰好相反.(见例题 12.7)

变截面梁

变截面梁中的应力可由式(12.2)和(12.5)求得. 若梁的截面是沿长度变化，通常最大弯应力并不是出现在弯矩最大的地方.(见例题 12.6)

梁的弹塑性弯曲和完全塑性弯曲

下面的论述适用于梁的最外层纤维达到了材料的曲服点 σ_{yp} 的情况，而且假定不论对拉伸和压缩都是同样的. 假设梁的材料具有类似于例题 11.11 中所分析的非弹性扭转的简化应力-应变曲线，即有一个水平平台向右延伸到无穷远. 这意味着是一种完全弹性-塑性行为. 通常卸载沿一条直线进行，该直线的斜率与弹性加载区的加载直线斜率相同，如图 12-3 中的虚线所示.

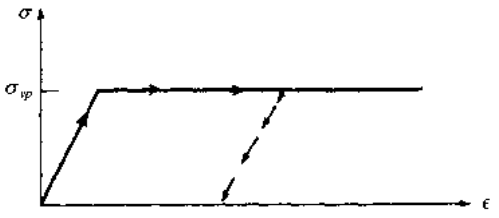


图 12-3

弹塑性作用

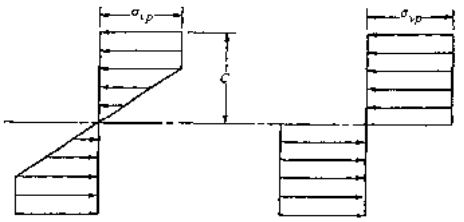
当弯矩足够大时，梁的内层纤维所受应力尚在材料的弹性范围内而最外层纤维已经达到曲服点了，如图 12-4(a)所示.(见例题 12.10 以及 12.12 至 12.14)

完全塑性作用

随着作用于梁上的弯矩不断增大，最后达到一个极限，此时所有层面的纤维所受应力都达

到了材料的曲服点，如图 12-4(b)所示.(见例题 12.11 和 12.15)

在完全塑性作用下，中性轴所处的位置恰好将横截面分割成两个相等的部分.(见例题 12.15)



(a) 弹塑性作用　　(b) 完全塑性作用

图 12-4

残余应力

如果作用到梁上的横向载荷足够大，则最外层纤维所受的应力达到曲服点(如图12-4(a)所示)，此后外载荷完全释放，于是残余拉伸和压缩应力留在杆内.在梁的纵轴方向上这些应力在整个横截面上的合力为零.(见例题 12.12)

例　题

梁的弹性弯曲

12.1 选择一种市场上出售的宽翼缘钢梁，要求其能承受 150 kN·m 的弯矩.假设梁的最大允许工作拉伸和压缩应力为 160 MPa.

解 由式(12.4)可知，外层纤维最大的弯应力可由 $\sigma_{max}=M/Z$ 确定.所以

$$Z=\frac{M}{\sigma_{max}}=\frac{(150\times10^{3})\text{N}\cdot\text{m}}{160\times10^{6}\text{N/m}^{2}}=937.5\times10^{-6}=937.5\times10^{3}\text{mm}^{3}$$

现在必须查阅表 12-2 来找一种截面模量至少是 937.5×10^{3} mm^3 的梁.很明显，型号为 W305×66 的梁正好适合这一要求，因为它的 $Z=952\times10^{3}$mm^3.型号为 W254×79 的梁深度较浅，其 $Z=988\times10^{3}$ mm^3，更为合适.

12.2 一根 3 m 长的简支梁承受 6 kN/m 的均布载荷.梁的横截面为 7 cm×15 cm 的矩形，如图 12-5 所示.求梁内最大的弯应力，梁的重量不计.同时求两支撑点之间的截面上位于上表面下方 2 cm 处的弯应力.

解 由对称性可知每个支撑点的约束反力为 9000 N.距梁的左端距离为 x 处的弯矩大小为

$$M=\left(9000x-6000x\,\frac{x}{2}\right)\text{N}\cdot\text{m}$$

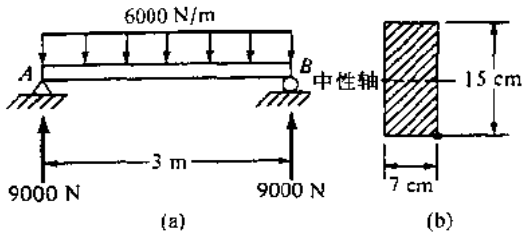


图 12-5

所以弯矩图具有抛物线形状，而且容易验证该抛物线对称于梁的中点，如图 12-6 所示.梁中点处的弯

矩大小为 $M_{1.5m}=(9000)(1.5)-(6000)(1.5)(0.75)=6750\text{N}\cdot\text{m}$.

我们马上要用到的矩形截面的惯性矩为

$$I=\frac{1}{12}bh^3=\frac{1}{12}(0.07\text{m})(0.15\text{m})^3$$
$$=19.69\times10^{-6}\text{m}^4$$



图 12-6

因为弯矩图表明最大的弯矩出现在梁的中点，所以最大的弯应力必定出现在该处最外层纤维上，应力的大小为

$$\sigma_{max}=\frac{MC}{I}=\frac{(6750\text{N}\cdot\text{m})(0.075\text{m})}{19.69\times10^{-6}\text{m}^4}=25.7\text{MPa}$$

出现在 C 为正值的下层纤维中，且是拉伸应力；

$$\sigma_{min}=\frac{(6750\text{N}\cdot\text{m})(-0.075\text{m})}{19.69\times10^{-6}\text{m}^4}=-25.7\text{MPa}$$

出现在 C 为正值上层纤维中，且是压缩应力.

在上表面下方 2cm 处，$y=-(7.5-2.0)=-5.5\text{cm}$，此处的法向应力为

$$\sigma=\frac{My}{I}=\frac{(6750\text{N}\cdot\text{m})(-0.055\text{m})}{19.69\times10^{-6}\text{m}^4}=-18.8\text{MPa}$$

结果中的负号表示中性轴上方所受的是压缩应力.

12.3　一根光导纤维电缆缠绕在直径 1 cm 的圆柱体上. 若电缆的直径为 0.5 mm，$E=2$ GPa，求电缆中的弯曲应力峰值.

解　我们来分析电缆中两个相邻的横截面，在弯曲之前，这两个截面相互平行. 电缆弯曲之后，这两个截面所处的位置如图 12-7 中 *a-a* 和 *b-b* 所示，图中 O 点为弯曲电缆的曲率中心. 通过作平行于截面 *a-a* 的直线 *de* 可以确定在距离 y 处（向下为正）纵向纤维的伸长. 若以 ρ 表示弯曲电缆的曲率半径，则由相似三角形 *cOd* 和 *edf* 可以计算这一层纤维的应变：

$$\epsilon=\frac{ef}{cd}=\frac{de}{cO}=\frac{y}{\rho}\tag{1}$$

因为每一层纵向纤维都是同轴拉伸或压缩，故由胡克定律有 $\sigma=E\epsilon$. 于是距中性轴距离为 y 处梁中的应力为

$$\sigma=E\frac{y}{\rho}\tag{2}$$

由给定的数据，弯曲应力的峰值（在外层纤维上）为

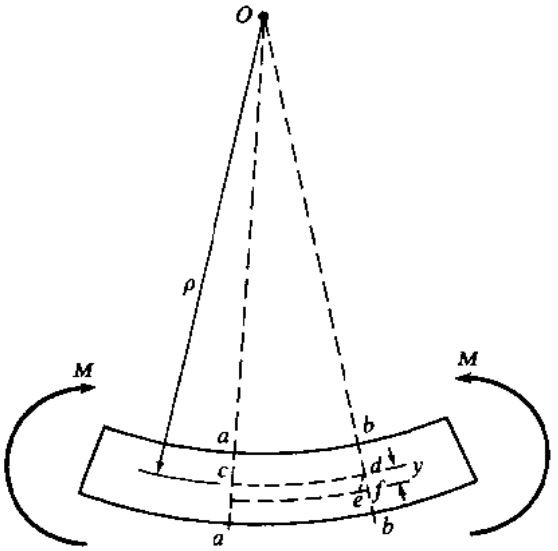


图 12-7

$$\sigma_{max} = (2 \times 10^9 \text{N/m}^2)\frac{0.25\text{mm}}{5\text{mm}} = 100\text{MPa}$$

12.4 图 12-8(a)所示的 W10×49 简支梁承受均匀变化的分布载荷作用，最大强度为每英尺长度 w lb(出现在右支撑点上)．若不论是拉伸还是压缩截面上的工作应力为 18 000 lb/in^2，求 w．梁的重力不计．

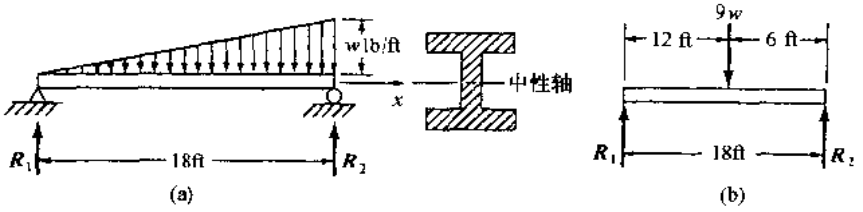


图 12-8

解　将分布载荷换算成合力，则约束反力 $\boldsymbol{R}_1$ 和 $\boldsymbol{R}_2$ 很容易以未知量 w 的形式来表示．因为分布载荷的平均值为 $\frac{w}{2}$ lb/ft，作用在 18 ft 的长度上，故合力的大小为 $18\left(\frac{w}{2}\right) = 9w$lb，作用在三角形载荷图的形心上，即距约束反力 $\boldsymbol{R}_1$ 的距离为 12ft，如图 12-8(b)所示．由静力学立即可知 $R_1 = 3w$，$R_2 = 6w$．

建立 x 轴与梁重合且令其原点落在左支撑点，如图 12-9(a)所示．于是在左约束反力右侧距离为 x 处，载荷强度可由相似三角形求得为 $(x/18)w$ lb/ft，利用例题 7.4 的解题步骤可求得距左支撑点为 x 处的剪切力 V：

$$V = 3w - \frac{1}{2}\frac{x}{18}wx = 3w - \frac{1}{36}wx^2$$

上面的方程式对 x 的所有值都成立，由此方程式可以绘出图 12-9(b)的剪力图．欲求零剪切力点，可令

$$3w - \frac{1}{36}wx^2 = 0, \text{解之得 } x = \sqrt{108} = 10.4\text{ ft}$$

该点也是弯矩呈现最大值的点．

再利用例题 7.4，可求得距左支撑点为 x 处的弯矩

$$M = 3wx - \frac{1}{2}\frac{x}{18}wx\frac{x}{3} = 3wx - \frac{1}{108}wx^3$$

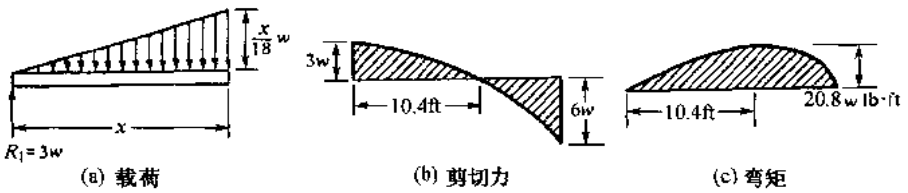


图 12-9

上面这个方程式也是对 x 的所有值都是成立的，由此方程，图 12-9(c)的弯矩图就可以画出了．在零剪切力点，即 $x = 10.4$ft，将此值代入上面的方程即可求得该点的弯矩

$$M_{10.4} = 3w\sqrt{108} - \frac{1}{108}w(\sqrt{108})^3 = 2w\sqrt{108}\text{lb} \cdot \text{ft} = 250w\text{lb} \cdot \text{in}$$

这就是梁中最大的弯矩．

在距梁的中性轴距离为 y 的任何纤维层上弯应力为 $\sigma = My/I$．梁的惯性矩可从表 12-1 查到为 272.9 in^4．最大的拉应力出现在梁的下层纤维上，该处 $y = 5$ in，而其所在截面是弯矩最大的截面，若该应力为 18 000 lb/in^2，于是式(12.2)变为

$$18\,000 = \frac{My}{I} = \frac{(250w)(5)}{272.9} \text{ 或 } w = 3930\text{ lb/ft}$$

12.5　图 12-10(a)中的 T 形简支梁承受图的三个集中载荷梁的材料为钛合金，其允许的工作应力为 600MPa 拉应力和 700MPa 压应力．求 P 的最大允许值．

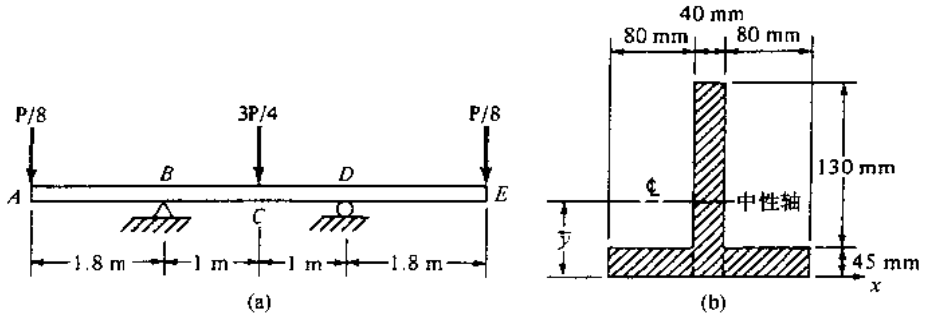


图 12-10

解　由对称性，每个支撑点上的约束反力为 P/2；弯矩图由直线构成，如图 12-11 所示．

接下来必须确定 T 形截面的性质．若如图 12-10(b)所示建立 x 轴，则形心在 x 轴的上方 $\bar{y}$ 处，

$$\bar{y} = \frac{(160)(45)(45/2) + (175)(40)(175/2)}{(160)(45) + (175)(40)} = 54.5\text{mm}$$

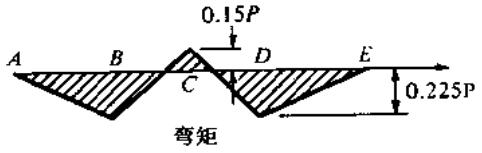


图 12-11

由例题 6.9 可知整个 T 形截面对 x 轴的惯性矩为

$$I_x = \frac{1}{3}(160)(45)^3 + \frac{1}{3}(40)(175)^3 = 71.46 \times 10^6\text{mm}^4$$

利用平行轴定理将对 x 轴的惯性矩换成对通过形心的中性轴(N.A.)的惯性矩，得

$$I_{\text{N.A.}} = 71.46 \times 10^6\ \text{mm}^4 - (14200\text{mm}^2)(54.5\text{mm})^2 = 29.28 \times 10^6\ \text{mm}^4$$

现在我们根据 B 点和 C 点最大允许拉应力和压应力来计算 P 的四个值，这四个值中的最小值便是最大允许值．

我们从 B 点开始．因为该处的弯矩是负的，故该处的梁向下凹，如图 12-12(a)所示．这样，上层纤维受拉，下层纤维受压．若在上层纤维中达到了 600MPa 的允许拉应力，则由(12.3)式

$$600 \times 10^6\text{N/m}^2 = \frac{0.225\text{P}_1[(175 - 54.5)(1/10^3)\text{m}]}{29.28 \times 10^{-6}\text{m}^4} \text{ 或 } \text{P}_1 = 648\ \text{kN}$$

若在下层纤维中达到了 700MPa 的允许压应力，则由式(12.3)

$$700 \times 10^6\text{N/m}^2 = \frac{0.225\text{P}_2[54.5(1/10^3)\text{m}]}{29.28 \times 10^{-6}\text{m}^4} \text{ 成 } \text{P}_2 = 1671\ \text{kN}$$

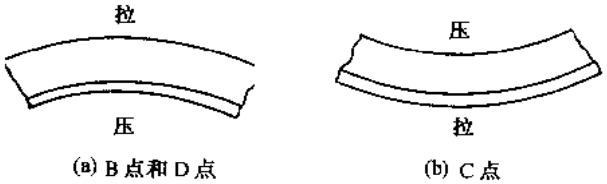


图 12-12

下一步来检查 C 点．因为该处的弯矩是正的，故该处的梁向上凹，如图 12-12(b)所示，这样，上层纤维受压，下层纤维受拉．若在下层纤维中达到了 600MPa 的允许拉应力，则

$$600\times10^6\text{N/m}^2=\frac{0.15\mathbf{P}_3[54.5(1/10^3)\text{m}]}{29.28\times10^{-6}\text{m}^4}\text{ 或 }\mathbf{P}_3=2149\text{ kN}$$

最后，若在上层纤维中达到了 700MPa 的允许压应力，则

$$700\times10^6\text{N/m}^2=\frac{0.15\mathbf{P}_4[(175-54.5)(1/10^3)\text{m}]}{29.28\times10^{-6}\text{m}^4}\text{ 或 }\mathbf{P}_4=1133\text{ kN}$$

这四个值中最小的是 $\mathbf{P}_1=648$ kN. 于是 B 点和 D 点的拉应力为控制应力，且最大的允许载荷为 $\mathbf{P}=648$ kN.

12.6 一锥形悬臂梁的几何尺寸如图 12-13 所示，在其自由端作用有力 **P**. 梁在其整个长度上的横截面都是正方形，宽度和高度从自由端向固定端都呈线性变化. 求梁中最大的法向应力.

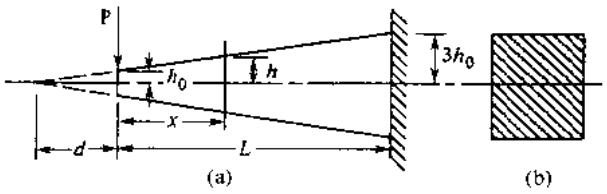


图 12-13

解 首先要确定梁的上表面和下表面相交的位置，这样问题的几何条件就清楚了. 由相似三角形，

$$\frac{h_0}{d}=\frac{3h_0}{d+L}\text{ 或 }d=\frac{L}{2}$$

其次，我们来分析距左端距离为 x 的梁的横截面(见图 12-13(a)). 由几何关系，该处的半高 h 为

$$h=\frac{x+L/2}{L/2}h_0=\left(\frac{2x}{L}+1\right)h_0$$

于是 x 处截面的平面惯性矩为

$$I=\frac{1}{12}\left[2\left(\frac{2x}{L}+1\right)h_0\right]\left[2\left(\frac{2x}{L}+1\right)h_0\right]^3=\frac{4}{3}\left(\frac{2x}{L}+1\right)^4h_0^4$$

而截面模量 Z 为

$$Z=\frac{I}{C}=\frac{\frac{4}{3}(2x/L+1)^4h_0^4}{(2x/L+1)h_0}=\frac{4}{3}\left(\frac{2x}{L}+1\right)^3h_0^3$$

该截面外层纤维的弯应力为

$$\sigma_{\max}=\frac{M}{Z}=\frac{Px}{\frac{4}{3}(2x/L+1)^3h_0^3}=\frac{3P}{4h_0^3}\left[\frac{x}{(2x/L+1)^3}\right]\tag{1}$$

我们现在尚无理由假设这些外层纤维的应力在梁的固定端达到了峰值. 相反，我们首先必须沿着梁寻找在什么位置这些应力最大，然后在该位置来计算式(1)的值. 令 $\frac{d\sigma_{\max}}{dx}=0$，该微商只涉及式(1)括号内的项，得

$$\left(\frac{2x}{L}+1\right)^3-(x)(3)\left(\frac{2x}{L}+1\right)^2\left(\frac{2}{L}\right)=0$$

解得 $x=L/4$，这就是外层纤维达最大值的截面所在的位置. 欲求外层应力的峰值，将上面解得的 x 值代入式(1)，得

$$\sigma_{\max}=\frac{1}{18}\frac{PL}{h_0^3}$$

[直接计算式(1)，可得到固定端外层纤维的应力为 $\sigma_L=\frac{1}{36}(PL/h_0^3)$，只有法向应力最大处的一半]

12.7 图 12-14 中的悬臂梁具有 T 形截面并承受图示的集中载荷. 求梁中最大的剪切力以及与支撑墙相邻的截面上位于上表面下方 1 in 处的剪切力.

解 在梁的整个长度上剪切力都是 12 000lb，所以不需画剪切力图.

x 轴的位置如图 12-14(b)所示，故截面形心位置为

$$\bar{y} = \frac{(3\text{in})(2\text{in})(1\text{in})(2) + (7\text{in})(2\text{in})(3.5\text{in})}{(3\text{in})(2\text{in})(2) + (7\text{in})(2\text{in})} = 2.35\text{in}$$

横截面相对 x 轴的惯性矩可由图 12-14(b)所示三个矩形相对 x 轴的惯性矩之和求得：

$$I_x = \frac{1}{3}(3\text{in})(2\text{in})^3(2) + \frac{1}{3}(2\text{in})(7\text{in})^3 = 245\text{in}^4$$

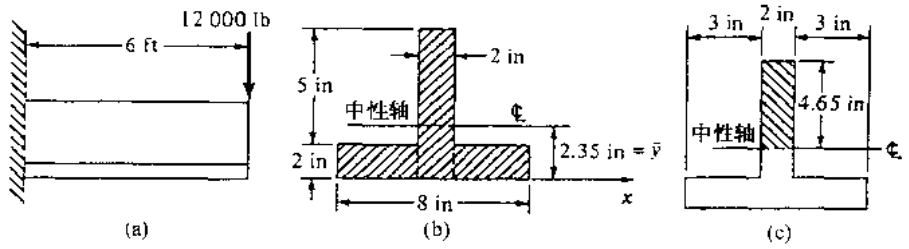


图 12-14

再利用平行轴定理将上面的惯性矩转换成对通过形心的中性轴的惯性矩：

$$I_{NA} = I_x - A\bar{y}^2 = 245\text{in}^4 - (26\text{in}^2)(2.35\text{in})^2 = 101\text{in}^4$$

由式(12.5)，距中性轴为 y_0 处的剪切应力为

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\,dA \tag{1}$$

检查上面方程后发现，最大剪切应力出现在中性轴上，因为该处 $y_0 = 0$，所以积分得到它的最大值. 不过，现在不必来做这个积分，因为我们知道 $y_0 = 0$ 的积分表示梁的中性轴与外层纤维之间的面积相对中性轴的第一类矩. 这一块面积就是图 12-14(c)中有阴影线的区域，其相对中性轴的第一类矩为 $2(4.65)(2.33) = 21.6\text{in}^3$. 将此值代入式(1)便可得中性轴上($b = 2\text{in}$)的剪切应力：

$$\tau = \frac{12\,000}{101(2)}21.6 = 1290\ \text{lb/in}^2.$$

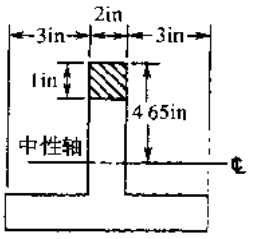


图 12-15

该 1290 lb/in^2 的最大剪切应力沿着梁的整个长度出现在中性轴的所有点上，因为在梁的整个长度上剪切力是恒定的.

在梁的上表面下方 1 in 处的剪切应力仍由式(1)确定. 然而，现在的积分表示图 12-15 中阴影线面积相对中性轴的第一类矩. 仍然不必做这个积分求积分值，因为该面积的形心坐标是已知的，在中性轴上方 4.15in 处. 于是该面积相对中性轴的第一类矩为 $2(1)(4.15) = 8.30\text{in}^3$，而上表面下方 1 in 处的剪切应力为

$$\tau = \frac{12\,000}{101(2)}(8.30) = 495\ \text{lb/in}^2$$

b 还是取 2，因为这是所求位于剪切应力处梁的宽度. 由于沿梁的长度剪切力处处都是 12 000 lb 所以整个梁上上表面下方 1 in 处的剪切应力处处都是 495 lb/in^2.

12.8 一根工字梁的几何尺寸如图 12-16 所示，其横截面上作用有 25 kN 的剪切力. 求截面的垂直梁腹中最大和最小的剪切应力值.

解：整个横截面相对中性轴的惯性矩为

$$I_{NA} = \frac{1}{12}(20\text{ mm})(240\text{ mm})^3 + 2\left[\frac{1}{12}(100\text{ mm})(20\text{ mm})^3 + (100\text{ mm})(20\text{ mm})(110\text{ mm})^2\right]$$

$$= 71.57 \times 10^6\,\text{mm}^4 = 71.57 \times 10^{-6}\text{m}^4$$

由式(12.5)，横截面上任何点的剪切应力 τ 为

$$\tau = \frac{V}{Ib}\int_{y_0}^{c} y\,dA \tag{1}$$

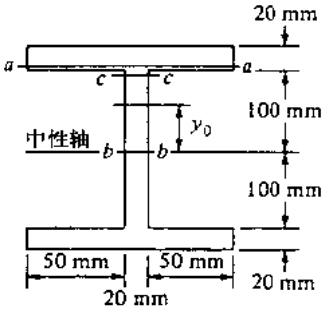


图 12-16

其中的 y_0 为中性轴至 τ 作用点的距离，I 是整个截面相对通过形心的中性轴的惯性矩. 正如我们在例题 12.7 中所指出的，剪切应力的最大值出现在中性轴上($y_0=0$). 而且，不必去做积分求得 $\int_0^c y\mathrm{d}A$ 的值，因为该积分表示中性轴与外层纤维之间的面积(图 12-17 的阴影部分)的第一类矩，其值为

$$(20\text{mm})(120\text{mm})(60\text{mm}) + (100\text{mm})(20\text{mm})(110\text{mm})$$
$$= 3.64\times10^{-4}\text{m}^3$$

由式(1)，最大剪切应力出现在截面 b-b 上，

$$\tau_{\max} = \frac{(25\,000\text{N})(3.64\times10^{-4}\text{m}^3)}{(71.57\times10^{-6}\text{m}^4)(0.02\text{m})} = 6.36\ \text{MPa}$$

梁腹中最小剪切应力出现在梁腹上离中性轴最远的点，即截面 c-c 上. 为求该处的剪切应力，必须知道突缘面积(图 12-18 中的阴影部分)对中性轴的第一类矩. 其值为

$$(120\text{mm})(20\text{mm})(110\text{mm}) = 0.264\times10^{-3}\text{m}^3$$

于是由式(1)，c-c 截面上的剪切应力为

$$\tau_{c\text{-}c} = \frac{(25\times10^3\text{N})(2.64\times10^{-4}\text{m}^3)}{(71.57\times10^{-6}\text{m}^4)(0.02\text{m})} = 4.61\ \text{MPa}$$

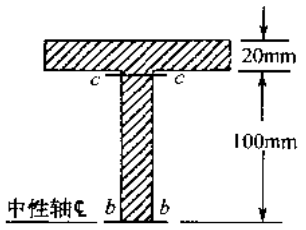


图 12-17

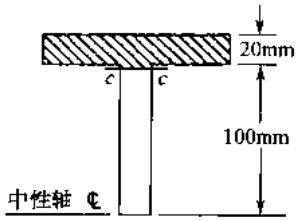


图 12-18

注意，梁腹上剪切应力的最大值与最小值间并没有很大的差别. 由此，通常只求剪切应力的近似值，其计算方法是将剪切力除以梁腹的截面面积. 本题中

$$\tau_{\text{mean}} = \frac{25\times10^3\text{N}}{(0.240\text{m})(0.020\text{m})} = 5.21\text{MPa}$$

最后，我们也能求得正好在突缘中 a-a 截面上的剪切应力. 该处的 $b=120$ mm，其值为

$$\tau_{a\text{-}a} = \frac{(25\times10^3\text{N})(2.64\times10^{-4}\text{m}^3)}{(71.57\times10^{-6}\text{m}^4)(0.120\text{m})} = 0.768\text{MPa}$$

梁的塑性弯曲

12.9 分析一根如图 12-19(a)所示的任意双对称截面梁，梁承受纯弯曲作用. 材料是完全弹性-塑性的，即其应力-应变曲线如图 12-19(b)所示，而且其应力-应变特征在拉伸和压缩两种情况中都一样. 求：当距中性轴为 y_1 的所有纤维层达到材料的屈服点时，作用于梁上的力矩.

解 尽管梁的弯曲会造成外层纤维屈服，但载荷施加之前垂直于梁的轴线的截平面在承受载荷后仍然保持为平面且垂直于轴线，这一假设还是符合实际的. 所以，梁的纵向纤维层的法向应变仍是随纤维层与中性轴的距离呈线性变化.

随着作用弯矩的值从零开始不断增大，梁的最外层纤维首先达到材料的屈服点；此时所有内部纤维层上的法向应力随纤维层与中性轴间的距离呈线性变化，如图 12-20(a)所示. 弯矩的值进一步增大，使得内部纤维层也达到屈服点，从而形成从外层纤维向内发展的屈服过程，如图 12-20(b)所示. 极限的情况是所有的纤维层(除沿中性轴的纤维层外)都达到了屈服点，此时的法向应力分布如图 12-20(c)所示. 对应于图 12-20(c)的弯矩称为完全塑性弯矩. 对于如图12-19(b)所示的应力-应变曲线，不可能承受更大的弯矩.

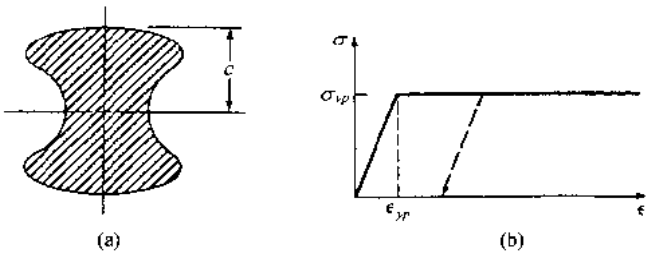


图 12-19

对于纯弯曲的梁，整个横截面上法向应力之和必为零. 所以对于双对称截面，从图 12-20(b)可以明显看出，中性轴必通过截面的形心. 然而这一点对一般非对称截面来说，不一定成立.

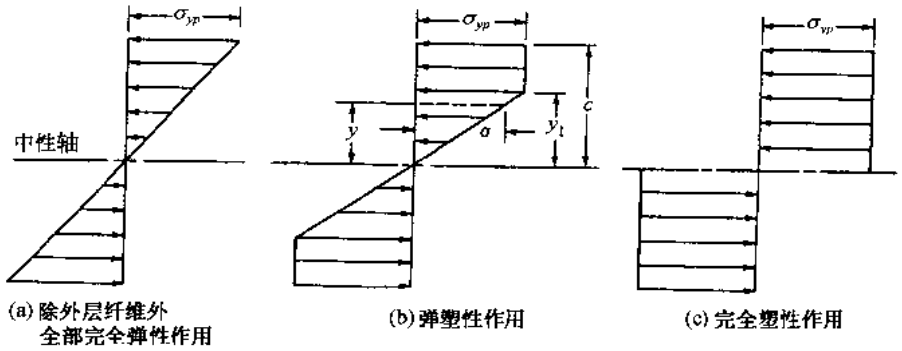


图 12-20

由图 12-20(b)，当 $y<y_1$ 时有

$$\frac{\sigma}{y}=\frac{\sigma_{yp}}{y_1} \text{ 或 } \sigma=\frac{y}{y_1}\sigma_{yp}$$

当 $y>y_1$ 时，$\sigma=\sigma_{yp}=$常数. 于是所需的弯矩为

$$M=\int \sigma y\mathrm{d}A=2\int_0^{y_1}\frac{y}{y_1}\sigma_{yp}y\mathrm{d}A+2\int_{y_1}^{c}\sigma_{yp}y\mathrm{d}A$$

$$=\frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\int_0^{y_1}y^2\mathrm{d}A+2\sigma_{yp}\int_{y_1}^{c}y\mathrm{d}A$$

12.10 对于一根矩形截面梁，求：当距中性轴为 y_1 的所有纤维层都达到了材料的屈服点时作用于梁上的弯矩.

解 由图 12-21 所示的几何尺寸，借用例题 12.9 的结果可知

$$M=\frac{2\sigma_{yp}}{y_1}\left(\frac{1}{3}by_1^3\right)+2\sigma_{yp}b(c-y_1)\frac{c+y_1}{2}$$

$$=\left(bc^2-\frac{b}{3}y_1^2\right)\sigma_{yp} \tag{1}$$

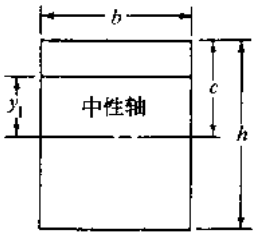


图 12-21

对于图 12-20(c)所示的极限情况，$y_1=0$，该矩形截面梁的完全塑性弯矩为

$$M_p=bc^2\sigma_{yp}=\frac{bh^2}{4}\sigma_{yp} \tag{2}$$

最大弹性弯矩，即最外层纤维刚达到屈服点而所有内层纤维仍在弹性范围内(图 12-20(a))的弯矩为

$$M_e=\frac{bh^2}{6}\sigma_{yp} \tag{3}$$

于是,对矩形截面梁,其完全塑性弯矩比最大弹性弯曲大 50%.

12.11 求 35 mm×70 mm 矩形截面梁的完全塑性弯矩.钢的曲服点为 250 MPa.同时求梁所能承载的最大弹性弯矩.

解 由例题 12.10 的(2)式可知完全塑性弯矩为

$$M_p = \frac{bh^2}{4}\sigma_{yp} = \frac{(0.035\ \text{m})(0.070\ \text{m})^2}{4}(250\times10^6\ \text{N/m}^2) = 10.72\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

由例题 12.10 的式(3)可知最大弹性弯矩为

$$M_e = \frac{bh^2}{6}\sigma_{yp} = \frac{(0.035\ \text{m})(0.070\ \text{m})^2}{6}(250\times10^6\ \text{N/m}^2) = 7.15\ \text{kN}\cdot\text{m}$$

12.12 例题 12.11 中的梁承受 9 kN·m 的弯矩.求弹性作用区与塑性作用区界面的位置.同时求 9 kN·m 弯矩卸截后残余应力的分布.

解 利用例题 12.10 的式(1),有

$$9000\ \text{N}\cdot\text{m} = \left[(0.035\ \text{m})\left(\frac{0.070}{2}\right)^2 - \frac{0.035\ \text{m}}{3}y_1^2\right](250\times10^6\ \text{N/m}^2)$$

解得 $y_1 = 0.02427\text{m}$ 或 24.27mm.于是,9 kN 弯曲产生的应力分布如图 12-22(b)所示.

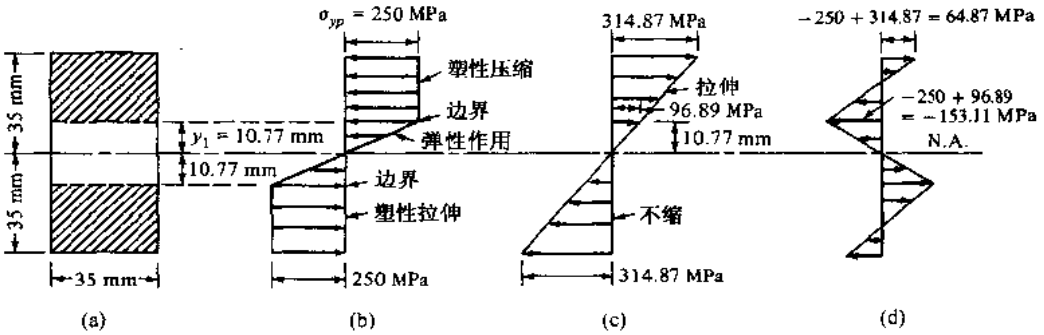


图 12-22

残余应力由例题 11.12 中关于扭转作用的解题步骤来确定,当弯矩撤去后,出现线性卸载,按照图 12-19(b)虚线箭头所示路线进行.在外层纤维中,卸载后的弯应力

$$\sigma = \frac{MC}{I} = \frac{(9000\ \text{N}\cdot\text{m})(0.035\ \text{m})}{\frac{1}{12}(0.035\ \text{m})(0.070\ \text{m})^3} = 314.87\ \text{MPa}$$

由卸载引起的应力分布如图 12-22(c)所示,图中中性轴上方的纤维受拉应力作用.

为求最终的应力状态,将图 12-22(b)的弹塑性应力叠加到图 12-22(c)的弹性卸载应力上,得到如图 12-22(d)所示的残余应力.整个横截面上残余拉应力和压应力之和当然必须为零,因为不存在净轴向载荷.

12.13 如图 12-23 所示的矩形截面梁,当距中性轴为 y_1 的所有纤维层都达到了材料的屈服点时,求弯矩和曲率半径间的关系.

解 假设加载前的平截面在加载后仍然是平面且垂直于梁的轴线.由此,轴向纤维的法向应变随纤维层与中性轴的距离呈线性变化.所以,若记距中性轴为 y_1 的纤维层的应变为 ε_{yp},记外层纤维应变为 ε_c,则

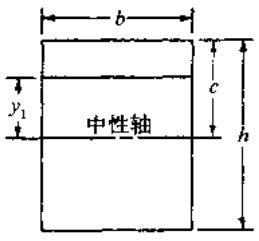


图 12-23

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_{yp}}{y_1} \tag{1}$$

分析一个初始时为矩形的微元,其长度沿梁的轴向为 dx,如图 12-24(a)所示.弯曲后其形状假设如图 12-24(b)所示.

由图 12-24(b),有

$$\frac{1}{R} = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\varepsilon_c}{C} \tag{2}$$

故

$$\frac{d\theta}{dx} - \frac{\varepsilon_{yp}}{y_1} = \frac{\sigma_{yp}}{Ey_1} \tag{3}$$

因为距中性轴为 y_1 的纤维层服从胡克定律 $\sigma_{yp} = E\varepsilon_{yp}$. 由例题 12.10,对应于该应变的弯矩为

$$M = \left(bc^2 y_1 - \frac{b}{3}y_1^3\right)\frac{\sigma_{yp}}{y_1} \tag{4}$$

于是,由式(3)、(4)可得

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{Eby_1\left(c^2 - \frac{1}{3}y_1^2\right)} \tag{5}$$

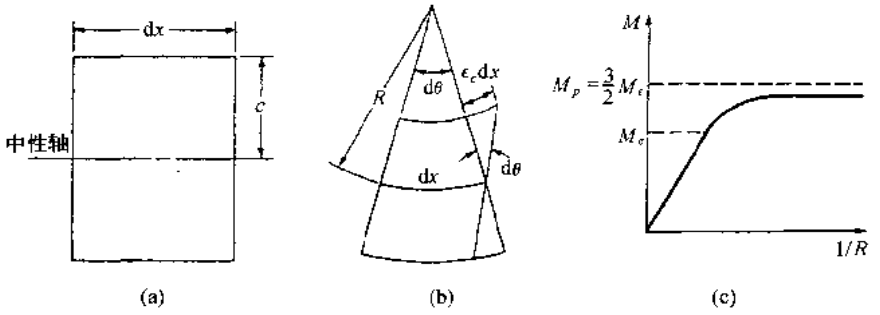


图 12-24

最后,由式(2)和式(5),得

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI(M/M_e)\sqrt{3 - 2M/M_e}} \tag{6}$$

其中 $M_e = \frac{1}{6}bh^2\sigma_{yp}$,如例题 12.10 中的结果. 这就是所求的弯矩 M 和曲率半径 R 间的关系. 图 12-24(c)是根据式(b)作出的曲线.

12.14 一根矩形截面钢梁的 $b = 1$ in, $h = \frac{1}{2}$ in, $\sigma_{yp} = 30\,000$ lb/in^2 及 $E = 30 \times 10^6$ lb/in^2. 求对应于最大弹性弯矩的曲率半径以及对应于 1850lb·in 弯矩的曲率半径.

解 由例题 12.10 的式(3),最大弹性弯矩为

$$M_e = \frac{1(1/2)^2}{6}30\,000 = 1250 \text{ lb} \cdot \text{in}.$$

对应于该弯矩的曲率半径可由例题 12.13 的式(6)求得:

$$\frac{1}{R} = \frac{1250}{(30 \times 10^6)\dfrac{(1)(1/2)^3}{12}\sqrt{3-2}} = 0.004 \text{ 或 } R = 250 \text{ in}$$

对应于 1850lb·in 弯矩的 y_1 值可由例题 12.10 的式(1)求得为 0.05in. 故对应于该值的曲率为

$$\frac{1}{R} = \frac{1850}{(30 \times 10^6)\dfrac{(1)(1/2)^3}{12}\left(\dfrac{1850}{1250}\right)\sqrt{3 - \dfrac{3700}{1250}}} = 0.02 \text{ 或 } R = 50\text{in}$$

12.15 对图 12-25(a)所示的 T 形截面,求完全塑性作用时中性轴的位置,同时求完全塑性弯矩 M_p 和最大弹性弯矩 M_e.

解 我们知道,完全塑性作用时中性轴(N.A.$_p$)将截面分成两块相等的面积. 若将中性轴距 x 轴的距离记为 d,则

$$(5\text{in})(1.5\text{in}) + (1.5\text{in})[(d - 1.5)\text{in}] = (1.5\text{in})[(7 - d)\text{in}]$$

解得 $d = 1.75$in.

完全塑性弯矩产生的完全塑性法向应力分布如图 12-25(b)所示. 假如我们将截面分成如图 12-25(c)所示的三个矩形,则可以以 F_1、F_2 和 F_3 来表示对应的法向应力分布. 这三个力对中性轴之矩的和就是完全塑性作用的弯矩:

$$M_p = \sigma_{yp}(5.25\text{in})(1.5\text{in})(5.25/2\text{in}) + \sigma_{yp}(0.25\text{in})(1.5\text{in})(0.125\text{in})$$

$$+ \sigma_{yp}(5\text{in})(1.5\text{in})[(0.25 + 0.75)\text{in}] = 28.22\sigma_{yp}$$

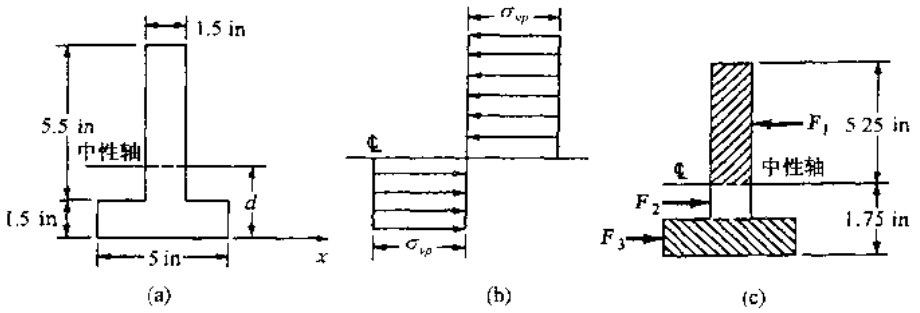


图 12-25

要求最大弹性弯矩的值，我们必须首先确定完全弹性作用时中性轴 N.A.$_e$ 的位置. 我们知道，该轴通过截面的形心，假设将截面分成如图 12-26(a)所示三个矩形并利用第七章中求形心位置的方法，则

$$\bar{y} = \frac{(7\text{in})(1.5\text{in})(3.5\text{in}) + 2(1.5\text{in})(1.75\text{in})(0.875\text{in})}{(7\text{in})(1.5\text{in}) + 2(1.5\text{in})(1.75\text{in})} = 2.62\text{in}$$

利用同样这三个矩形，我们求得截面相对 x 轴的惯性矩为

$$I_X = \frac{1}{3}(1.5\text{in})(7\text{in})^3 + 2\left[\frac{1}{3}(1.75\text{in})(1.5\text{in})^3\right] = 175.44\text{in}^4$$

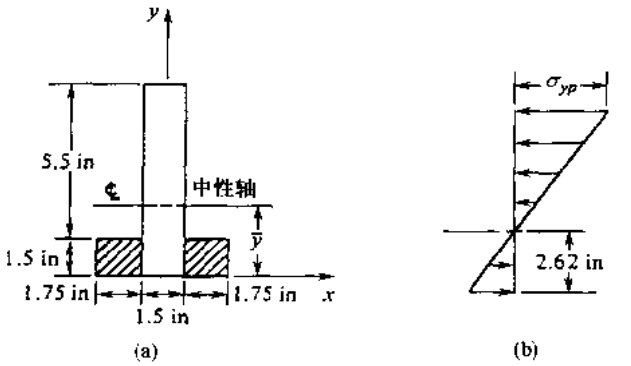


图 12-26

然后应用平行轴定理求得相对于中性轴的惯性矩：

$$I_{\text{N.A.}_e} = I_X - A\bar{y}^2 = 175.44\text{in}^4 - (15.75\text{in}^2)(2.62\text{in})^2 = 67.33\text{in}^4.$$

中性轴(N.A.$_e$)上方的纤维层受压，下方的纤维层受拉. 弹性应力分布如图 12-26(b)所示. 假若我们将对应应力分布的力对中性轴(N.A.$_e$)取矩，则得 $M_e = 15.92\sigma_{yp}$.

补充习题

12.16 一根钛金属梁具有 35mm×70mm 的矩形截面，其曲服点为 825MPa. 若外层纤维弯应力峰值为 700 MPa，求相应的弯矩.

答案：23.6 kN·m

12.17 一根长 10 ft 的悬臂梁在其整个长度上承受 2000 lb/ft 的均布载荷，弯曲时的工作应力为 20 000 lb/in^2，选择一种能承受这一载荷的宽翼缘梁.

答案：W10×54

12.18 一条 1 mm 厚的带钢弯成半径 1 m 的圆弧. 求最大弯应力. 取 $E = 200\text{GPa}$.

答案：100MPa

12.19　图 12-27 的 T 形悬臂梁在其自由端受集中载荷作用，求由弯曲引起的压应力和拉应力峰值。

答案：－19 600 lb/in²；8820 lb/in²

12.20　对例题 12.19 中的梁，保持突缘深度(1.25in)不变，但改变梁腹的高度。欲使压应力峰值的大小是拉应力峰值的 2 倍，求截面总高度 H(梁腹加突缘)。

答案：$H=11.18$in

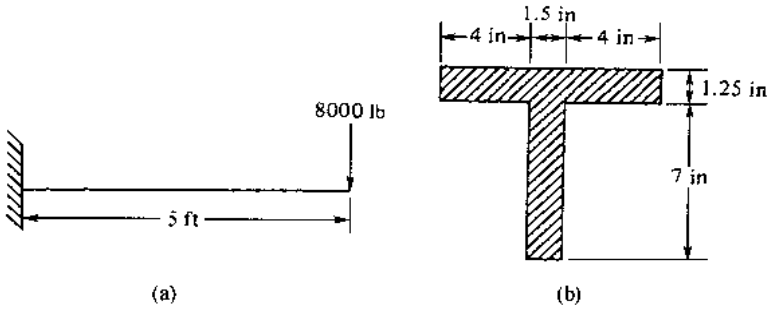


图 12-27

12.21　图 12-28 中的 T 形悬臂梁承受 7000N/m 的均布载荷，其中包括梁的重量。求拉伸和压缩的弯应力峰值。

答案：27.5MPa；－49.1MPa

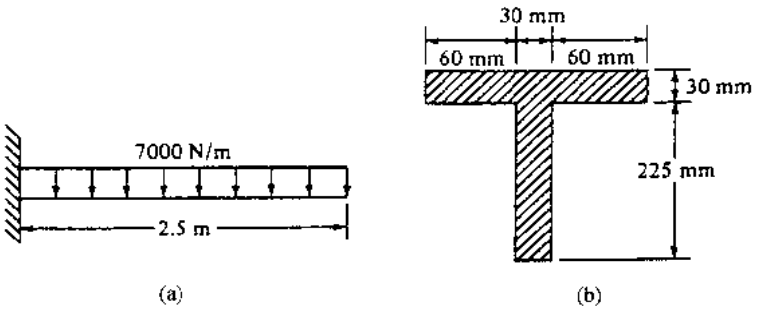


图 12-28

12.22　图 12-29 中的简支梁承受如图所示的两个集中力作用，材料是钢的，其拉伸或压缩的工作应力为 180 MPa，其矩形截面的高度是宽度的 1.75 倍。求承受该载荷所需梁的宽度。

答案：50.7 mm

12.23　在 12.22 题中，若将 8 kN 的力替换成 64 kN，将 6 kN 的力替换成 48 kN。选择一种宽翼缘梁，使其在弯曲工作应力为 160 MPa 的条件下能承受这一载荷。

答案：W254×54

12.24　图 12-30 所示的简支梁受图示均布载荷的作用。梁是木质的，弯曲工作应力为 1500 lb/in²(拉伸和压缩都一样)，剪切工作应力为 90 lb/in²。梁的截面是矩形，其高度比宽度长 50%。求梁所需的高度。

答案 23.2in

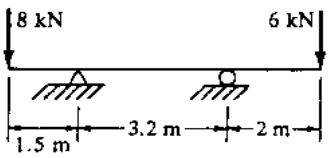


图 12-29

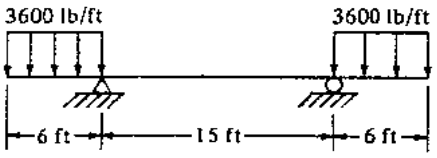


图 12-30

12.25 假如图 12-29 中的载荷作用在一根宽翼缘钢梁上，梁的弯曲工作应力为 24 000 lb/in^2. 选择合适的梁截面.

答案：W8×40

12.26 图 12-31 中的压制成型梁有两根对称的梁腹. 其受力状态就如自由端受弯矩 M 作用的悬臂梁. 若允许的工作拉应力为 80 MPa，求允许的最大弯矩.

答案：102.6 kN·m

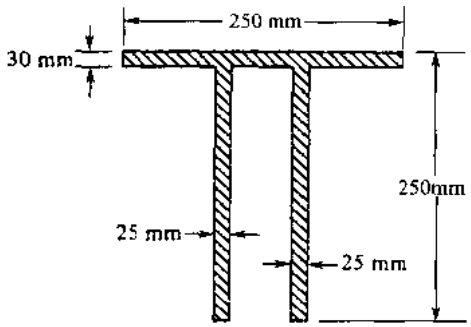


图 12-31

12.27 图 12-32 的 T 形梁受图示纯弯曲作用. 若压缩工作应力是拉伸工作应力的 2.5 倍，求突缘的宽度 b.

答案：10.09 cm

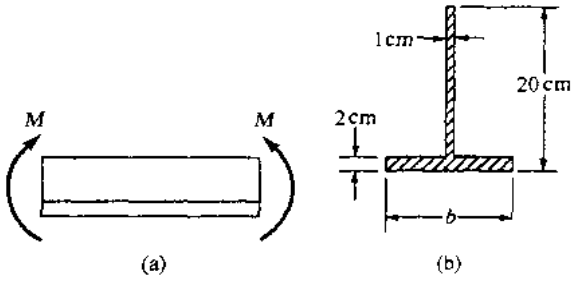


图 12-32

12.28 图 12-33 中 U 形压制成型梁 $b=30$ cm，$t=2$ cm. 梁中存在的弹性压应力峰值是拉应力峰值的 2.5 倍. 通过确定 h_1 和 h_2 求中性轴位置.

答案：有两个解，(1)$h_1=7.12$ cm，$h_2=17.81$ cm；(2)$h_1=2.78$ cm $h_2=6.95$ cm

12.29 图 12-34 中的梁 ABC 在 A 和 B 两点简支，BC 段外悬，梁受 20 kN/m 的均布载荷作用. 材料为钛合金，其拉伸或压缩的工作应力为 600MPa，梁的截面为正方形. 求截面的边长.

答案：80.3 mm

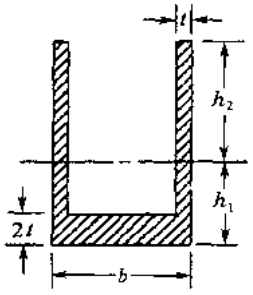


图 12-33

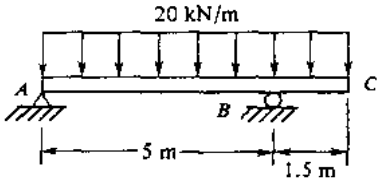


图 12-34

12.30　图 12-35 中的简支悬臂梁，受均布载荷和一力偶的作用．选择一种宽翼缘截面，使其能承受该载荷且弯应力不超过 22 000 lb/in^2．

答案：W8×24

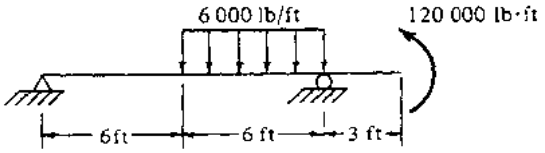


图 12-35

12.31　图 12-36 中的简支悬臂梁受图示集中和分布载荷作用．梁材为钢，其弯曲工作应力为 22 000 lb/in^2，其截面为矩形且高度是宽度的两倍．求能承受该载荷所需的截面宽度．

答案：1.94in

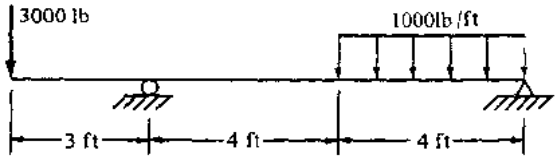


图 12-36

12.32　一简支槽形截面钢梁受均布载荷和一力偶的作用，如图 12-37 所示。求梁内产生的最大拉应力和压应力．

答案：3020 lb/in^2；−5520 lb/in^2

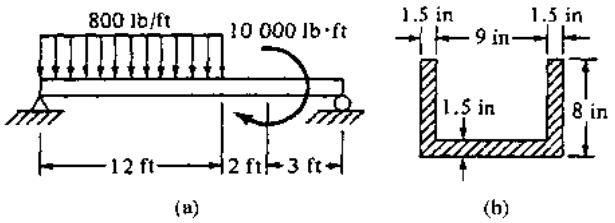


图 12-37

12.33　图 12-38 中的简支悬臂梁受三个集中力的作用，梁的截面为 T 形，材料为灰铸铁，其允许的工作拉应力为 5 000 lb/in^2，压应力为 20 000 lb/in^2．求 P 的最大允许值．

答案：P = 12 000 lb

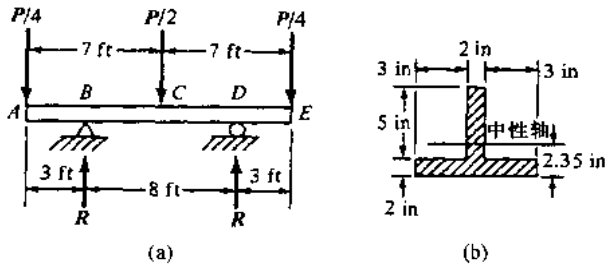


图 12-38

12.34　一根悬臂梁具有变化的圆截面．梁的轮廓为曲线 $y = cx^{1/3}$．在其自由端作用有垂直集中力 P，如图

12-39 所示.求最大法向应力.

答案:$4P/\pi c^3$ = 常数.在所有的外层纤维上

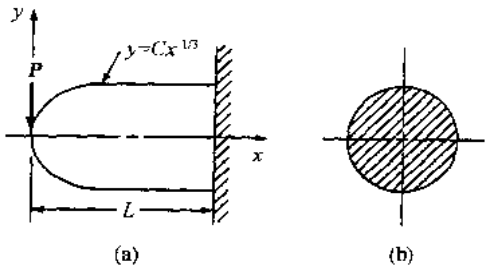


图 12-39

12.35 求图 12-40 中简支梁的(a)最大弯应力;(b)最大剪切应力.

答案:(a)30 MPa;(b)3 MPa

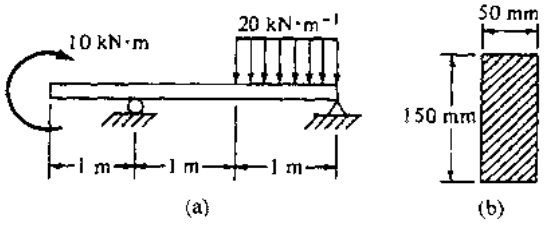


图 12-40

12.36 对于图 12-41 所示的 T 形截面,求完全塑性作用的中性轴位置.

答案:在截面最底层纤维上方 155 mm 处

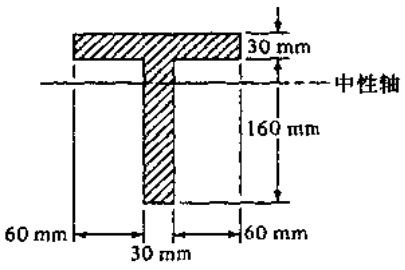


图 12-41

12.37 型号为 W8×40 的宽翼缘钢截面的曲服点为 38 000 lb/in^2,求完全塑性弯矩,同时求截面所能承受的最大弹性弯矩.

答案:M_p = 1 516 200 lb·in;M_e = 1 349 000 lb·in

表 12-1 典型宽翼缘截面的特性,英制单位

型号*	单位长度重量 (lb/ft)	面积 (in^2)	I(x-x 轴) (in^4)	Z (in^3)	I(对 y-y 轴) (in^4)	Z_p(塑性截面模量) (in^3)
W 18×70	70.0	20.56	1153.9	128.2	78.5	144.7
W 18×55	55.0	16.19	889.9	98.2	42.0	111.6
W 12×72	72.0	21.16	597.4	97.5	195.3	108.1
W 12×58	58.0	17.06	476.1	78.1	107.4	86.5
W 12×50	50.0	14.71	394.5	64.7	56.4	72.6
W 12×45	45.0	13.24	350.8	58.2	50.0	64.9
W 12×40	40.0	11.77	310.1	51.9	44.1	57.6
W 12×36	36.0	10.59	280.8	45.9	23.7	51.4
W 12×32	32.0	9.41	246.8	40.7	20.6	45.0
W 12×25	25.0	7.39	183.4	30.9	14.5	35.0
W 10×89	89.0	26.19	542.4	99.7	180.6	114.4
W 10×54	54.0	15.88	305.7	60.4	103.9	67.0
W 10×49	49.0	14.40	272.9	54.6	93.0	60.3
W 10×45	45.0	13.24	248.6	49.1	53.2	55.0
W 10×37	37.0	10.88	196.9	39.9	42.2	45.0
W 10×29	29.0	8.53	157.3	30.8	15.2	34.7
W 10×23	23.0	6.77	120.6	24.1	11.3	33.7
W 10×21	21.0	6.19	106.3	21.5	9.7	24.1
W 8×40	40.0	11.76	146.3	35.5	49.0	39.9
W 8×35	35.0	10.30	126.5	31.1	42.5	34.7
W 8×31	31.0	9.12	109.7	27.4	37.0	30.4
W 8×28	28.0	8.23	97.8	24.3	21.6	27.1
W 8×27	27.0	7.93	94.1	23.4	20.8	23.9
W 8×24	24.0	7.06	82.5	20.8	18.2	23.1
W 8×19	19.0	5.59	64.7	16.0	7.9	17.7
W 6×15 $\frac{1}{2}$	15.5	4.62	28.1	9.7	9.7	11.3

* W 后的第一个数表示规定截面深度(ft),第二个数表示单位长度重量(16/ft).

表 12-2　典型宽翼缘截面的特性,国际单位

型号*	单位长度重量 (kg/m)	面积 (mm^2)	宽(对 x-x 轴) ($10^6 mm^4$)	Z ($10^3 mm^3$)	I(对 y-y 轴) ($10^6 mm^4$)	Z_p(弹性截面模量) ($10^3 mm^3$)
W 460×103	102.9	13 200	479	2100	32.6	2 370
W 460×81	80.9	10 400	369	1610	17.4	1 820
W 305×106	105.8	13 600	248	1590	81.0	1 770
W 305×85	85.3	11 000	198	1280	44.6	1 410
W 305×74	73.5	9 480	164	1060	23.4	1 190
W 305×66	66.2	8 530	146	952	20.7	1 060
W 305×59	58.8	7 580	129	849	18.3	942
W 305×53	52.9	6 820	117	750	9.83	840
W 305×47	47.0	6 060	102	665	8.55	736
W 305×37	36.8	4 760	76.1	505	6.02	572
W 254×131	130.8	16 900	225	1630	74.9	1 870
W 254×79	79.4	10 200	127	988	43.1	1 100
W 254×72	72.0	9 280	113	893	38.6	986
W 254×66	66.2	8 530	103	803	22.1	899
W 254×54	54.4	7 010	81.7	652	17.5	736
W 254×43	42.6	5 490	65.3	504	6.31	567
W 254×34	33.8	4 360	50.0	394	4.69	551
W 254×31	30.9	3 990	44.1	352	4.02	394
W 203×59	58.8	7 580	60.7	580	20.3	652
W 203×51	51.4	6 630	52.5	508	17.6	567
W 203×46	45.6	5 870	45.5	448	15.4	497
W 203×41	41.2	5 300	40.6	397	8.96	443
W 203×40	39.7	5 110	39.0	383	8.63	391
W 203×35	35.3	4 550	34.2	340	7.55	378
W 203×28	27.9	3 600	26.8	262	3.28	290
W 152×23	22.8	2 980	11.7	159	4.02	185

* W 后的第一个数表示规定截面深度(mm),第二个数表示单位长度重量(kg/m).

第十三章　梁的挠度

在第十二章中我们分析了作用于初始是直梁上的各种载荷.这些载荷除了产生应力(这是上一章讨论的问题)外,还会在对称面内,即作用力和弯矩所在平面内产生挠曲.有几种方法来求解挠度的大小.

两次积分法

两次积分法是对描述初始态是弹性直梁的中面挠度的微分方程进行直接的两次积分.该方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M \tag{13.1}$$

其中 E 为杨氏模量,I 为梁的截面相对中性轴的惯性矩(见第六章),M 为沿梁的长度方向任何截面上的弯矩大小(见第七章).

弯矩 M 习惯的符号规定见图 13-1.使得梁产生向上凹弯曲的力或力偶规定为正弯矩,这样的力偶也视为是正的.



(a) 正弯矩　　(b) 负弯矩

图 13-1

式(13.1)中,x 为沿梁的纵轴延伸的坐标轴尺度,通常画成水平的(见图 13-2);y 轴垂直于 x 轴,正向向上.在这样的符号规定下,图 13-2 中 B 和 C 点的挠度是负的.

回忆第七章所讲的,$M(x)$的解析表达式随着梁上载荷的变化而变化,图 13-2 中梁的 AB 和 BC 每一段上分别有不同的关于 $M(x)$的方程.于是式(13.1)的两次积分将会在每一段上得到不同的代数方程,遗憾的是,也会在每一段上得到两个积分常数;这样一来,对于图 13-2 中的简单载荷,也有四个积分常数需要通过约束反力(在 A 端)的边界条件和挠度连续性以及两段共同点 B 的斜率连续性来确定.在图 13-2 的例子中,这一分析过程得到挠度曲线方程

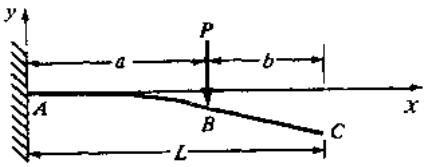


图 13-2

$$EIy = \begin{cases} \dfrac{p}{6}x^3 - \dfrac{pa}{2}x^2, & \text{当 } 0 < x < a \qquad (13.2) \\ \dfrac{-pa^2}{2}x + \dfrac{pa^3}{6}, & \text{当 } a < x < L \qquad (13.3) \end{cases}$$

很明显,如果作用于梁上的载荷不止一个,则挠度的计算将是极其繁琐枯燥的.所以两次积分法仅适用于比较简单的载荷(见例题 13.4).

奇异函数法

奇异函数(或括号函数)在第七章中作了介绍.奇异函数

$$f_n(x) = \langle x - a \rangle^n$$

若尖括号中的值为零或负的，则函数值定义为零；若尖括号中的值为正，则函数值定义为$(x-a)^n$。奇异函数提供了一个简单的方法来书写在梁的整个长度任何点上产生挠度的单个方程。边界条件的引入通常变得极其简单和直接。（见例题 13.5 至 13.11）

机算机解

奇异函数使我们有可能利用比较简单的 FORTRAN 程序，通过输入作用载荷的大小、梁的几何尺寸和材料性质来求解梁的挠度。这种简单来自于奇异函数的定义和 FORTRAN 中的 IF 语句之间的对应性。这样的程序在例题 13.12 中列出，而例题 13.13 是该程序使用的一个例子。

变截面梁

上述方法两次积分法和奇异函数法的任何一种均可以用于变截面梁，只要截面的变化可以用比较简单的表达式来描述（见例题 13.4）。假若截面的变化很复杂，则需要借助高级数值解法。

静不定梁

在分析比较简单的结构系统时，有可能通过单独利用静力学平衡方程来确定外加载荷引起的约束反力。这样的系统称为静定系统。比较复杂的系统会引起比静力学平衡方程数目更多的未知约束反力分量。为了确定这种称为静不定系统中的外约束反力，需要补充所能得到的静力学方程以及从弹性系统变形得到的附加方程。两次积分法和奇异函数法都适用于寻找这类附加方程。（见例题 13.14 至 13.20）

例　题

静定系统：两次积分法

13.1　求图 13-3 所示悬臂梁在均匀变化载荷作用下的挠度曲线方程。

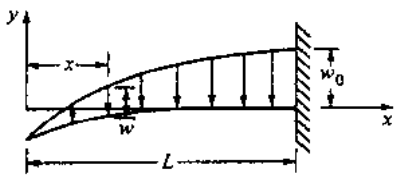


图 13-3

解　如图 13-3 所示，将 x 轴沿未挠曲的梁放置，y 轴与梁垂直。现在必须确定距梁的自由端为 x 处的载荷强度 w。因为梁若不出现挠曲，载荷图是一个三角形，放由几何关系有

$$\frac{w}{x} = \frac{w_0}{L} \text{ 或 } w = \frac{x}{L}w_0$$

在距自由端为 x 处，弯矩为 x 点左侧的三角形载荷，其大小为该三角形的面积，其合力作用点在距三角形顶点距离为 $2x/3$ 处。所以 x 处的弯矩为

$$\left(\frac{1}{2}x\,\frac{x}{L}w_0\right)\frac{1}{3}x = \frac{w_0}{6L}x^3$$

于是，挠曲后梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{w_0}{6L}x^3$$

将上述方程积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w_0}{6L}\frac{1}{4}x^4 + C_1 \tag{1}$$

注意到当 $x = L$ 时，梁的斜率为零，则积分常数 C_1 可以确定。由式(1)

$$0 = -\frac{w_0L^3}{24} + C_1 \text{ 或 } C_1 = \frac{w_0L^3}{24}$$

于是式(1)变为

$$EI\frac{dy}{dx}=-\frac{w_0}{24L}x^4+\frac{w_0L^3}{24}$$

再积分一次,得

$$EIy=-\frac{w_0}{24L}\frac{x^5}{5}+\frac{w_0L^3}{24}x+C_2 \tag{2}$$

利用 $x=L$ 时挠度为零这一事实,可确定积分常数 C_2. 由式(2)

$$0=\frac{w_0L^4}{120}+\frac{w_0L^4}{24}+C_2 \text{ 或 } C_2=-\frac{w_0L^4}{30}$$

所以所求的挠度曲线方程为

$$EIy=\frac{w_0}{120L}x^5-\frac{w_0L^3}{24}x-\frac{w_0L^4}{30}$$

例如,我们可以利用此方程求自由端($x=0$)处的挠度

$$EIy_{x=0}=-\frac{w_0L^4}{30} \text{ 或 } y_{x=0}=-\frac{w_0L^4}{30EI}$$

13.2 求图 13-4 所示简支梁在其左端力偶 $\boldsymbol{M}_1$ 作用下的挠度曲线方程.

解 由对 A 点力矩的平衡,有

$$+\circlearrowleft\sum M_A=M_1-R_BL \text{ 或 } R_B=\frac{M_1}{L}$$

然后,将垂直方向的力相加,我们得到 R_A 大小与 R_B 相等但作用方向向下. 于是 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$ 构成一个力偶与外加力偶 $\boldsymbol{M}_1$ 相抗衡.

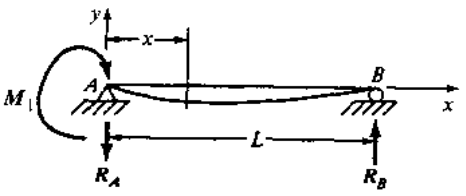


图 13-4

如图 13-4 建立坐标系,坐标原点在 A 点. 距 A 点为 x 的任何截面上,弯矩的大小为

$$M=M_1-R_Ax$$

式中 M_1 设定为正的,因为它产生正的(向上凹)的曲线.

挠曲后梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=M_1-\frac{M_1}{L}x$$

积分一次,得

$$EI\frac{dy}{dx}=M_1x-\frac{M_1}{L}\frac{x^2}{2}+C_1$$

我们对梁两端的斜率一无所知,所以不能立即确定 C_1. 相反,再积分一次,得

$$EIy=M_1\frac{x^2}{2}-\frac{M_1}{2L}\frac{x^3}{3}-C_1x+C_2 \tag{1}$$

现在我们可以利用两个边界条件,即在梁的两端挠度为零. 对于 A 点的边界条件,将 $x=0$ 和 $y=0$ 代入式(1),得 $C_2=0$. 对 B 点的边界条件,将 $x=L$ 和 $y=0$ 代入,得

$$0=\frac{M_1L^2}{2}-\frac{M_1L^2}{6}+C_1L \text{ 或 } C_1=-\frac{M_1L}{3}$$

于是挠度曲线方程为

$$EIy=\frac{M_1}{2}x^2-\frac{M_1}{6L}x^3-\frac{M_1L}{3}x \tag{2}$$

而梁上任意点的斜率为

$$EI\frac{dy}{dx}=M_1x-\frac{M_1}{2L}x^2-\frac{M_1L}{3} \tag{3}$$

13.3 若例题 13.2 中的梁是钢的,$E=30\times10^6$ lb/in^2,截面为 2 in×3 in 的矩形,长度为 8 ft. 求最大挠度点所在位置及挠度大小,$M_1=90\ 000$ lb·in.

解 首先要检查应力状态,判断是否是完全弹性作用. 弯矩图如图 13-5 所示,其 A 点的峰值等于 M_1. 于是外层纤维的弯应力为

$$\sigma_{max}=\frac{6M_1}{bh^2}=\frac{6(90\ 000\ \text{lb}\cdot\text{in})}{(2\ \text{in})(3\ \text{in})^2}=30\ 000\ \text{lb/in}^2$$

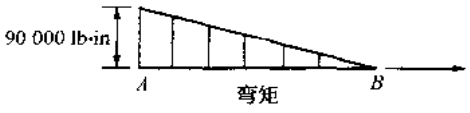


图 13-5

因为该应力在任何钢材的弹性范围内，所以我们利用例题 13.2 的变形方程是合理的.

图 13-4 中的梁上挠度最大的点是挠曲后的梁斜率为零的点. 令例题 13.2 的式(3)中 $\frac{dy}{dx}=0$，得

$$0 = M_1 x - \frac{M_1}{2L}x^2 - \frac{M_1 L}{3}$$

该方程演变成二次方程

$$x^2 - 2Lx + \frac{2}{3}L^2 = 0$$

这个方程只有一个根，即 $x=0.423L$ 适用，另一个根给出的点在 B 点的右侧. 所以挠度的峰值出现在 $x=0.423L=40.6$ in 处.

将该值代入例题 13.2 的式(2)可得挠度峰值的大小：

$$(30\times10^6\ \text{lb/in}^2)\left[\frac{1}{12}(2\ \text{in})(3\ \text{in})^3\right]y = \frac{(90\ 000\ \text{lb}\cdot\text{in})}{2}(40.6\ \text{in})^2$$
$$-\frac{(90\ 000\ \text{lb}\cdot\text{in})}{6(96\ \text{in})}(40.6\ \text{in})^3 - \frac{(90\ 000\ \text{lb}\cdot\text{in})(96\ \text{in})}{3}(40.6\ \text{in})$$

解得 $y=0.24$ in

13.4 一悬臂梁的顶视图如图 13-6(a)所示，梁的厚度为恒值 h，如图 13-6(b)所示. 求由作用于自由端的垂直力 $\boldsymbol{P}$ 产生的挠度曲线方程以及自由端的挠度.

解 本题与前面讨论的梁的挠度问题不同之处在于沿梁的长度方向截面的惯性矩是变化的. 所以 I 是 x 的函数. 为求得距固定端任意距离 x 处的惯性矩，首先须确定方程 $z^2=fx+g$ 中的常数 f 和 g. 我们知道，当 $x=0$ 时，$z=a$，故 $g=a^2$. 同理，当 $x=L$ 时，$z=0$，故 $f=-a^2/L$. 这样，梁的轮廓线由下面方程描述：

$$z^2 = -\frac{a^2}{L}x + a^2 = a^2\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

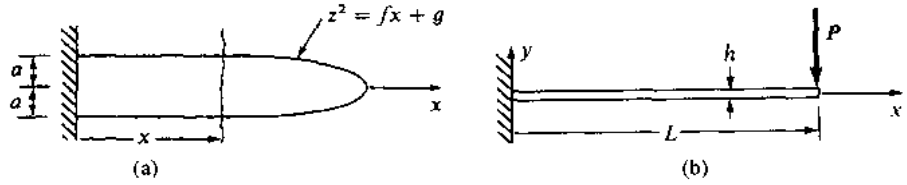


图 13-6

所以距固定端为 x 的截面相对于与 z 轴平行的中性轴的惯性矩为

$$I = \frac{1}{12}(2z)h^3 = \frac{ah^3}{6\sqrt{L}}(L-x)^{1/2} \tag{1}$$

变形后梁的微分方程为

$$\frac{Eah^3}{6\sqrt{L}}(L-x)^{1/2}\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x) \tag{2}$$

为简洁起见，令

$$K = \frac{Eah^3}{6\sqrt{L}}$$

这样，式(2)可写成

$$K\frac{d^2y}{dx^2} = -P(L-x)^{1/2} \tag{3}$$

第一次积分后得

$$K\frac{dy}{dx} = -P\left[-\frac{2}{3}(L-x)^{3/2}\right] + C_1 \tag{4}$$

利用当 $x=0$ 时斜率为零的边界条件可以确定 C_1. 由式(4)，有

$$0 = -\frac{2P}{3}(L)^{3/2} + C_1 \text{ 或 } C_1 = -\frac{2P}{3}L^{3/2} \tag{5}$$

再积分一次得

$$Ky = \frac{2P}{3}\left[-\frac{2}{5}(L-x)^{5/2}\right] + \frac{2P}{3}L^{3/2}x + C_2 \tag{6}$$

我们知道，当 $x=0$ 时，$y=0$，这是第二个边界条件．由式(6)，有

$$0 = -\frac{4P}{15}L^{5/2} - 0 + C_2$$

所以

$$C_2 = \frac{4P}{15}L^{5/2} \tag{7}$$

这样，挠度曲线方程为

$$y = \frac{6\sqrt{L}P}{Eah^3}\left[-\frac{4}{15}(L-x)^{5/2} - \frac{2}{3}L^{3/2}x + \frac{4L^{5/2}}{15}\right] \tag{8}$$

由式(8)可知自由端 $x=L$ 处的挠度为

$$y_{x=L} = -\frac{12PL^3}{5Eah^3}$$

静定系统：奇异函数法

13.5　利用奇异函数求解图 13-7 所示简支梁在集中力 $\boldsymbol{P}$ 作用下的挠度方程．

解　首先利用静力学方程确定约束反力．由对 A 点力矩平衡可求得 $R_C = Pa/L$；由垂直方向力的平衡可求得 $R_A = Pb/L$．

其次利用第七章的奇异函数以一个方程来描述沿梁的整个长度的弯矩变化：

$$M = \frac{Pb}{L}\langle x\rangle - P\langle x-a\rangle$$

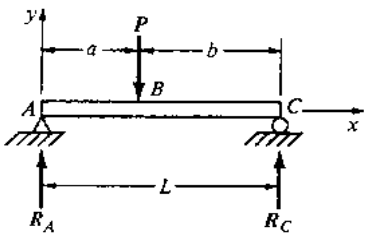


图 13-7

于是梁的变形微分方程式(13.1)变为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M = \frac{Pb}{L}\langle x\rangle - P\langle x-a\rangle \qquad (1)$$

对式(1)积分得

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{Pb}{2L}\langle x\rangle^2 - \frac{P}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1$$

其中 C_1 为积分常数．第二次积分得

$$EIy = \frac{Pb}{6L}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_1x + C_2$$

其中 C_2 为另一个积分常数．由 $x=0$ 和 $x=L$ 时，$y=0$ 这两个边界条件可求得这两个常数．将这两组数据先后代入式(2)，可得

$$C_2 = 0 \quad \text{和} \quad C_1 = -\frac{PbL}{6} + \frac{Pb^3}{6L}$$

于是所求的挠度方程为

$$EIy = \frac{Pb}{6L}\langle x\rangle^3 - \frac{P}{6}\langle x-a\rangle^3 + \left(-\frac{PbL}{6} + \frac{Pb^3}{6L}\right)x$$

13.6　利用奇异函数求解图 13-8(a)所示简支梁在单个力偶作用下的挠度方程．

解　利用静力平衡方程确定 A 和 C 两处的约束反力，其大小已在图 13-8(b)中标出．这两个约束反力构成一力偶与施加的力偶 M_1 抗衡．然后写出单个的方程来描述沿整个梁的长度弯矩的变化：

$$M(x) = -\frac{M_1}{L}\langle x\rangle^1 + M_1\langle x-a\rangle^0$$

接着，利用(13.1)式写出弯曲后梁的微分方程：

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M_1}{L}\langle x\rangle^1 + M_1\langle x-a\rangle^0$$

积分一次得

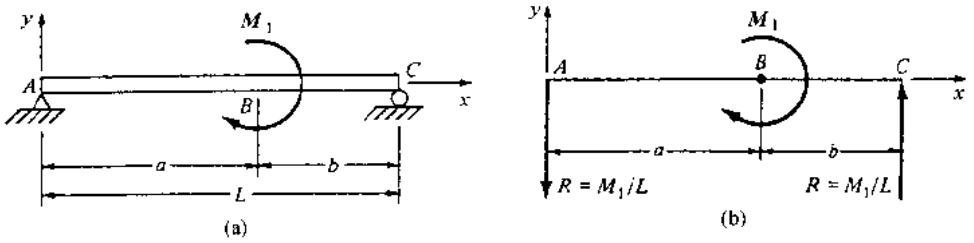


图 13-8

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{M_1}{2L}\langle x\rangle^2 + M\langle x-a\rangle^1 + C_1$$

再一次积分得

$$EIy = -\frac{M_1}{6L}\langle x\rangle^3 + \frac{M_1}{2}\langle x-a\rangle^2 + C_1x + C_2$$

我们有边界条件：当 $x=0$ 和 $x=L$ 时，$y=0$ 先后利用这两个边界条件，可解得

$$C_2 = 0 \quad 和\ C_1 = \frac{M_1L}{6} - \frac{M_1b^2}{2L}$$

于是挠度方程为

$$EIy = -\frac{M_1}{6L}\langle x\rangle^3 + \frac{M_1}{2}\langle x-a\rangle^2 + \left(\frac{M_1L}{6} - \frac{M_1b^2}{2L}\right)x \tag{1}$$

注意，我们没有理由认为 B 点，即外加力偶的作用点的挠度为零. 事实上，由式(1)给出的结果可知该处的挠度肯定不为零.

13.7 考虑一根在部分长度上承受均布载荷的简支梁(见图 13-9). 利用奇异函数求梁的挠度方程.

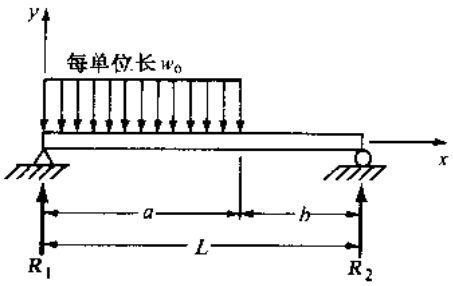


图 13-9

解 由静力平衡方程可解得约束反力为

$$R_1 = \frac{w_0}{2L}(L^2-b^2)$$

$$R_1 = w_0a - \frac{w_0}{2L}(L^2-a^2)$$

沿梁的长度方向所有点的弯矩可由单个方程描述

$$M = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^2 \tag{1}$$

式(1)等号右面最后一项在 x 大于 a 时可用来抵消分布载荷 $-(\frac{w_0}{2})\langle x\rangle^2$

现在由式(13.1)

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^2$$

所以

$$EI\frac{dy}{dx} = \frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{w_0}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{w_0}{6}\langle x-a\rangle^3 + C_1$$

$$EIy = \frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + C_1x + C_2 \tag{2}$$

为确定 C_1 和 C_2，可利用边界条件当 $x=0$ 和 $x=L$ 时，$y=0$. 于是由式(2)解得

$$C_2 = 0 \quad 和\ C_1 = \frac{w_0L^3}{24} - \frac{w_0b^4}{24L} - \frac{w_0L}{12}(L^2-b^2)$$

由此，挠度方程为

$$EIy = \frac{w_0}{12L}(L^2-b^2)\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \left(-\frac{w_0L^3}{24} - \frac{w_0b^4}{24L} + \frac{w_0Lb^2}{12}\right)x$$

13.8　均布载荷作用于简支梁的部分长度上，如图 13-10(a)所示. 利用奇异函数求梁的挠曲方程.

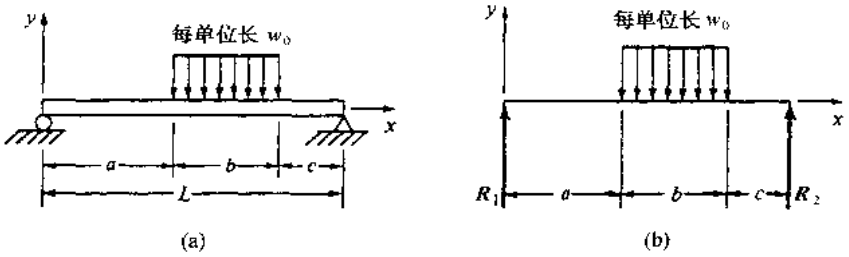


图 13-10

解　图 13-10(b)所示的约束反力大小为

$$R_1 = \frac{w_0 b}{L}\left(\frac{b}{2}+c\right) \text{和 } R_2 = \frac{w_0 b}{L}\left(\frac{b}{2}+a\right)$$

利用奇异函数可用单个方程给出沿整个梁的弯矩：

$$M = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2$$

于是

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = R_1\langle x\rangle^1 - \frac{w_0}{2}\langle x-a\rangle^2 + \frac{w_0}{2}\langle x-a-b\rangle^2$$

所以

$$EI\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{R_1}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{w_0}{6}\langle x-a\rangle^3 + \frac{w_0}{6}\langle x-a-b\rangle^3 + C_1$$

$$EIy = \frac{R_1}{6}\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + C_1x + C_2 \tag{1}$$

我们有当 $x=0$ 和 $x=L$ 时，$y=0$ 的边界条件. 将这些条件先后用于式(1)，得

$$C_2 = 0,\quad C_1 = \frac{w_0}{24L}[(L-a)^4-(L-c)^4] - \frac{w_0 bL}{6}\left(\frac{b}{2}+c\right)$$

于是所求的挠度曲线为

$$EIy = \frac{w_0 b}{6L}\left(\frac{b}{2}+c\right)\langle x\rangle^3 - \frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4 + \frac{w_0}{24}\langle x-a-b\rangle^4 + \left\{\frac{w_0}{24L}[(L-a)^4-(L-c)^4] - \frac{w_0 bL}{6}\left(\frac{b}{2}+c\right)\right\}x$$

13.9　图 13-11 中的梁在 B 和 C 两点简支，在 A 和 D 两端受力偶作用. 利用奇异函数求梁的挠度方程以及在梁的中点 $x=3a/2$ 处的挠度.

解　由静力学方程，B 和 C 两处的垂直约束反力不难求得，它们大小相等方向相反，每个力大小均为 $2M_0/a$，如上图所示. 这两个约束反力构成一力偶与外加力偶相平衡. 建立如图 13-11 所示的直角坐标系，原点在 A 点，我们可以写出对梁上任何点的单个弯矩方程：

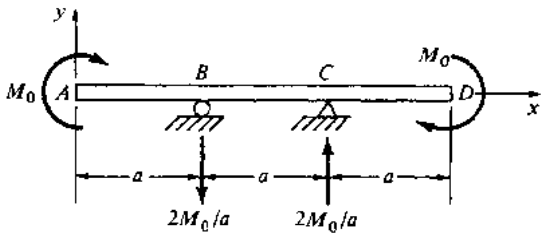


图 13-11

$$M = M_0\langle x\rangle^0 - \frac{2M_0}{a}\langle x-a\rangle + \frac{2M_0}{a}\langle x-2a\rangle$$

于是弯曲后梁的微分方程为

$$EI\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = M_0\langle x\rangle^0 - \frac{2M_0}{a}\langle x-a\rangle + \frac{2M_0}{a}\langle x-2a\rangle \tag{1}$$

对式(1)连续两次积分得

$$EI\frac{dy}{dx} = M_0\langle x\rangle - \frac{2M_0}{a}\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} + \frac{2M_0}{a}\frac{\langle x-2a\rangle^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

和

$$EIy - M_0\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{M_0}{a}\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + \frac{M_0}{a}\frac{\langle x-2a\rangle^3}{3} + C_1\langle x\rangle + C_2 \tag{3}$$

一个边界条件为 $x=a$ 时，$y=0$. 将这些值代入式(3)，得

$$0 = \frac{M_0a^2}{2} + C_1a + C_2 \tag{4}$$

第二个边界条件为 $x=2a$ 时 $y=0$. 代入式(3)得

$$0 = \frac{M_0}{2}4a^2 - \frac{M_0}{3a}a^3 + 2C_1a + C_2 \tag{5}$$

联立求解方程(4)和(5)得 $C_1=-\frac{7}{6}M_0a$ 和 $C_2=\frac{2}{3}M_0a^2$. 于是挠度曲线方程为

$$EIy = \frac{M_0}{2}\langle x\rangle^2 - \frac{M_0}{3a}\langle x-a\rangle^3 + \frac{M_0}{3a}\langle x-2a\rangle^3 - \frac{7}{6}M_0a\langle x\rangle + \frac{2}{3}M_0a^2 \tag{6}$$

在 $x=3a/2$ 处的挠度可将此值代入式(6)而求得，其值为 $y=0$. 载荷和约束反力的对称表明这一结果是合理的.

13.10　利用奇异函数求图 13-12(a)中的简支悬臂梁的挠度曲线方程.

解　梁的分离体图如图 13-12(b)所示. 由静力学平衡方程，垂直的约束反力求得为 $R_1=225$ N 和 $R_2=525$ N. 于是，利用奇异函数，沿梁的长度任何点的弯矩可写成

$$M = -225\langle x\rangle + 100\langle x-1\rangle^0 - \frac{100}{2}\langle x-2\rangle^2 + \frac{100}{2}\langle x-4\rangle^2 + 525\langle x-4\rangle \tag{1}$$

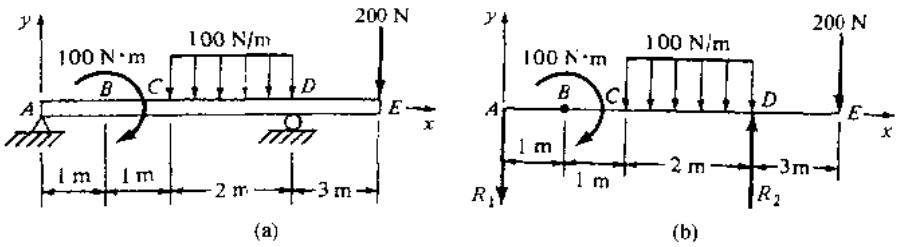


图 13-12

在上述方程中，100 N·m 的外加力偶认为是正的，因为它会产生(对力偶作用点右侧的那段梁来说)向上凹的弯曲，根据我们的符号规定即是正的. 同样，式(1)等号右侧第三项对应于均布载荷 100 N/m，且将该载荷一直作用到梁的右端 E. 为了在 D 和 E 之间消除这一影响，我们必须在这一段施加一向上的 100 N/m 均布载荷，于是 DE 段上的净均布载荷就为零. 这一点是由式(1)中的第四项来实现的.

由式(13.1)，挠曲后梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -225\langle x\rangle^1 + 100\langle x-1\rangle^0 - 50\langle x-2\rangle^2 + 50\langle x-4\rangle^2 + 525\langle x-4\rangle^1 \tag{2}$$

将式(2)积分两次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{225}{2}\langle x\rangle^2 + 100\langle x-1\rangle^1 - \frac{50}{3}\langle x-2\rangle^3 + \frac{50}{3}\langle x-4\rangle^3 + \frac{525}{2}\langle x-4\rangle^2 + C_1 \tag{3}$$

和

$$EIy = -\frac{225}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{100}{2}\langle x-1\rangle^2 - \frac{50}{12}\langle x-2\rangle^4 + \frac{50}{12}\langle x-4\rangle^4 + \frac{525}{6}\langle x-4\rangle^3 + C_1x + C_2 \tag{4}$$

边界条件为 $x=0$ 和 $x=4$ 时 $y=0$. 在(4)式中利用这些条件可解得 $C_1=504$ 和 $C_2=0$. 故所求的挠曲方程为

$$EIy = -\frac{225}{6}\langle x\rangle^3 + \frac{100}{2}\langle x-1\rangle^2 - \frac{50}{12}\langle x-2\rangle^4 + \frac{50}{12}\langle x-4\rangle^4$$

$$+\frac{525}{6}\langle x-4\rangle^3+504x$$

13.11 一简支梁在其左半段受均匀变化载荷的作用，如图 13-13(a)所示. 利用奇异函数求梁的挠度曲线方程.

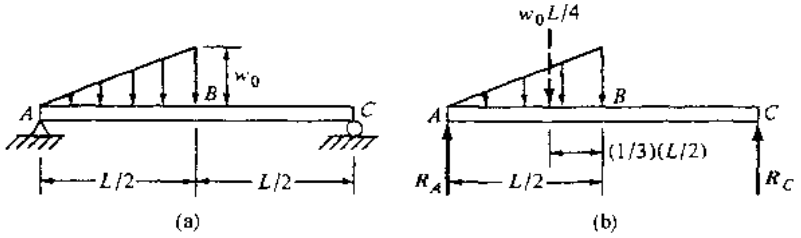


图 13-13

解 为求约束反力，允许以合力$\left(\frac{1}{2}\right)(w_0)(L/2)$代替分布载荷. 因为载荷是三角形的，故合力通过三角形的形心，其位置在距梁的中点$(1/3)(L/2)$处，如图 13-13(b)所示. 由对 C 点的力矩方程可得

$$+\circlearrowleft \sum M_C = R_AL - \frac{w_0L}{4}\left(\frac{L}{2}+\frac{L}{6}\right)=0 \text{ 或 } R_A=\frac{w_0L}{6}$$

下一步必须确定沿梁长度方向每一点的弯矩. 在梁的 AB 段，我们考虑距 A 点为 x 的一截面，此时仅将 x 截面左侧那一部分分布载荷用它的合力来代替(见图 13-14). 由几何关系，x 处的载荷强度为

$$w=\frac{w_0}{L/2}x=\frac{2w_0}{L}x \tag{1}$$

于是 x 左侧分布载荷的合力为

$$\frac{1}{2}x\frac{2w_0}{L}x=\frac{w_0x^2}{L}$$

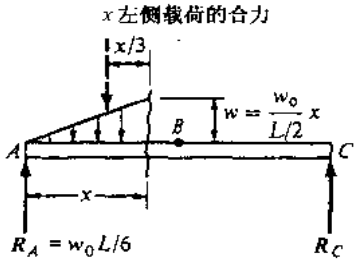


图 13-14

在图 13-14 中该合力用虚线表示，其作用位置在 x 截面左侧距离为 $x/3$ 处，在 AB 段产生的弯矩为

$$\frac{w_0}{L}\langle x\rangle^2\frac{\langle x\rangle}{3}=\frac{w_0}{3L}\langle x\rangle^3 \tag{2}$$

表达式(2)意味着该分布载荷一直延续作用到梁的右半段 BC，如图 13-15 所示. 所以，在 BC 段对应于矩形①和三角形②必须引入反向载荷(即向上的)，才能使得 BC 段上的净载荷为零. 图 13-15 说明如何通过 x 表示这两部分载荷

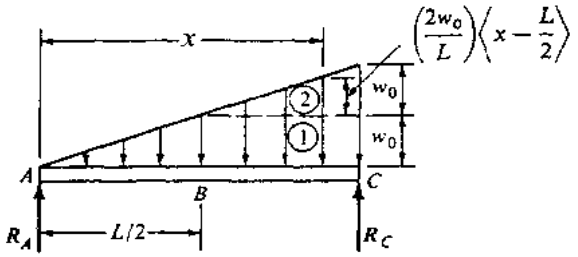


图 13-15

现在我们可以利用奇异函数来写梁上任意点的弯矩方程了. 该方程为

$$M=\frac{w_0L}{6}\langle x\rangle-\frac{w_0}{3L}\langle x\rangle^3+w_0\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle\frac{\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle}{2}$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{2w_0}{L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle\right)\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle\frac{\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle}{3}$$

于是弯曲后梁的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{w_0L}{6}\langle x\rangle-\frac{w_0}{3L}\langle x\rangle^3+\frac{w_0}{2}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^2+\frac{w_0}{3L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^3$$

将上式积分两次，得到挠度方程

$$EIy=\frac{w_0L}{36}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{60L}\langle x\rangle^5+\frac{w_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4+\frac{w_0}{60L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5+C_1\langle x\rangle+C_2 \qquad (3)$$

边界条件为，$x=0$(A 点)时，和 $x=L$(C 点)时，$y=0$. 将这两组数先后代入式(3)，解得 $C_2=0$ 和 $C_1=-0.01416w_0L^3$. 于是梁的挠度方程最终为

$$EIy=\frac{w_0L}{36}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{60L}\langle x\rangle^5+\frac{w_0}{24}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4+\frac{w_0}{60L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^5-0.01416w_0L^3\langle x\rangle$$

静定系统：计算机解

13.12　编写一个 FORTRAN 程序计算梁上不同点的挠度和斜率．梁具有恒截面，两端简支，承受任意的集中力、力偶和均布载荷作用，作用点的位置已知.

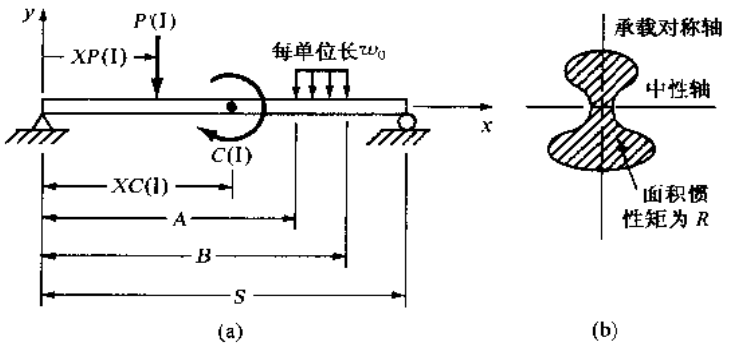


图 13-16

解　我们在下表中使用图 13-16 所示的术语：

P(I)＝集中力 I 的数值，取向下作用为正
XP(I)＝P(I)的 x 坐标
C(I)＝集中力偶的数值，取顺时针为正
XC(I)＝C(I)的 x 坐标
W0＝均布载荷强度，取向下作用为正
A，B＝W0 的起始、终结 x 坐标
E＝杨氏模量
R＝梁对中性轴的惯性矩
S＝梁的长度
N＝沿梁的长度需要求解挠度的等间距点的个数(包括两个端点)减 1
NP＝集中力作用的数目
NC＝集中力偶作用的数目

下面列出的就是数值求解式(13.1)的 FORTRAN 程序．该程序可提供梁两端和沿梁 $N-1$ 段上的横向挠度．正负值分别表示向上和向下挠度．用户不必去计算端点的约束反力，任何统一的单位制都适用.

```
00001       PROGRAM BEAMDEF
00002C      DEFLECTIONS OF A SIMPLY SUPPORTED BEAM SUBJECTED
```

```
00003C      TO CONCENTRATED MOMENTS, CONCENTRATED FORCES
00004C      AND UNIFORMLY DISTRIBUTED LOADING
00005C      ___ REACTIONS MUST BE AT END POINTS OF THE BEAM,
00006C      THIS PROGRAM DETERMINES BEAM REACTIONS.
00007       DIMENSION P(15),XP(15),C(15),XC(15),XN(100)
00008       DIMENSION Y(100).SL(100)
00009C           P(I) & C(I) ARE VALUES OF CONCENTRATED FORCES & COUPLES
00010C           XP(I) & XC(I) ARE COORDINATES OF P(I) & C(I)
00011C           FROM LEFT ENDPOINT OF BEAM
00012C           XN(I) ARE COORDINATES OF SEGEMENT NODES FROM LEFT END OF
00013C           INCLUDING LEFT & RIGHT ENDPOINTS
00014C           Y(I) & SL(I) ARE DEFLECTIONS & SLOPES AT NODES XN(I)
00015       LP = 1
00016       DO 420 LT = 1, LP
00017           PRINT*, 'ENTER THE VALUES E,R,S,N.NC,NP:'
00018       READ( * , * ) E,R,S,N,NC,NP
00019C           E IS YOUNGS MODULUS, R IS MOMENT OF INERTIA
00020C           S IS LENGTH OF SPAN, N IS NUMBER OF SEGEMENTS OF SPAN
00021C           NC IS NUMBER OF CONCENTRATED COUPLES
00022C           NP IS NUMBER OF CONCENTRATED FORCES
00023           PRINT*,'ENTER THE VALUES A,B,W0:'
00024       READ( * , * ) A,B,W0
00025C           A & B ARE COORDINATES OF DISTRIBUTED LOADING FROM LEFT END
00026C           W0 IS DISTRIBUTED LOADING-DOWNWARD IS POSITIVE
00027       IF(NC.EQ.0) GO TO 400
00028C           INPUT COORDINATES OF CONCENTRATED COUPLES
00029C           THEN INPUT THEIR VALUES-CLOCKWISE IS POSITIVE
00030           PRINT*,' ENTER THE ALL VALUES XC(I) & THEN ALL C(I):'
00031       READ( * , * )(XC(I), I = 1,NC),(C(I), I = 1,NC)
00032 400   IF(NP.EQ.0) GO TO 410
00033C           INPUT COORDINATES OF CONCENTRATED FORCES
00034C           THEN INPUT THEIR VALUES-DOWNWARD IS POSITIVE
00035           PRINT*,'ENTER ALL THE VALUES XP(I) & THEN ALL P(I):'
00036       READ( * , * )(XP(I), I = 1,NP),(P(I),I = 1,NP)
00037 410   DX = S/N
00038       PRINT 20
00039 20    FORMAT(38HDEFLECTIONS OF A SIMPLY SUPPORTED BEAM)
00040       PRINT 21,E,R,S
00041 21    FORMAT(1X, 2HE = , E10.3,2X, 2HI = ,E10.3, 2X, 2HL = , E10.3)
00042       DO 110 I = 1, N + 1
00043       XN(I) = DX * (I-1)
00044 110   CONTINUE
00045       EI = E * R
00046       IF(NC.LE.0) GO TO 200
00047       PRINT 22
00048       PRINT 23
00049 22    FORMAT(45H CONCENTRATED COUPLES- CLOCKWISE IS POSITIVE)
00050 23    FORMAT(14H LOCATION- IN,7X, 15H COUPLE- IN * LB)
00051        DO 450 KT = 1, N + 1
```

```
00052          SL(KT) = 0.0
00053          Y(KT) = 0.0
00054 450      CONTINUE
00055          DO 140 K = 1, NC
00056          PRINT 24,XC(K),C(K)
00057 24       FORMAT(F10.3, 12X, E10.3)
00058          C1 = S/6.0-(S-XC(K)) * * 2/(2.0 * S)

00059          DO 140 I = 1,N + 1
00060          SL(I) = SL(I) + (C(K)/EI) * (-XN(I) * * 2/(2.0 * S) + C1)
00061          Y(I) = Y(I) + (C(K)/EI) * (-XN(I) * * 3/(6.0 * S) + C1 * XN(I))
00062          IF(XN(I)-XC(K)) 140, 140, 135
00063   135    SL(I) = SL(I) + (C(K)/EI) * (XN(I)-XC(K))
00064          Y(I) = Y(I) + (0.5 * C(K)/EI) * (XN(I)-XC(K)) * * 2
00065   140    CONTINUE
00066   200    IF(NP.LE.0) GO TO 300
00067          PRINT 25
00068 25       FORMAT(41H CONCENTRATED FORCES-DOWNWARD IS POSITIVE)
00069          PRINT 251
00070 251      FORMAT(14H LOCATION - IN, 7X, 11H FORCE - LB)
00071          DO 220 K = 1, NP
00072          PRINT 26,XP(K),P(K)
00073 26       FORMAT(F10.3,12X, E10.3)
00074          C2 = (-S * (S-XP(K)) * S + (S-XP(K)) * * 3)/(6.0 * S)
00075          DO 220 I = 1, N + 1
00076          IF(XN(I)-XP(K)) 221,221,215
00077 221      SL(I) = SL(I) + (P(K)/EI) * ((S-XP(K)) * XN(I) * * 2/(2.0 * S) + C2)
00078          Y(I) = Y(I) + (P(K)/EI) * ((S-XP(K)) * XN(I) * * 3/(6.0 * S) + C2 * XN(I))
00079          GO TO 220
00080 215      SL(I) = SL(I) + (P(K)/EI) * ((S-XP(K)) * XN(I) * * 2-S * (S-XP(K)) * S/3.0
00081 +        + (S-XP(K)) * * 3/3.0-(XN(I)-XP(K)) * * 2 * S)/(2.0 * S)
00082          Y(I) = Y(I) + (P(K)/EI) * ((S-XP(K)) * XN(I) * (XN(I) * * 2-S * * 2)
00083 +        + (S-XP(K)) * * 3 * XN(I)-(XN(I)-XP(K)) * * 3 * S)/(6.0 * S)
00084   220    CONTINUE
00085   300    IF(W0.EQ.0.0) GO TO 170
00086          PRINT 430
00087 430      FORMAT(40HDISTRIBUTED LOADING-DOWNWARD IS POSITIVE)
00088          PRINT 440,A,B,W0
00089 440      PORMAT(1X,2HA = ,F10.3,2X,2HB = ,F10.3,2X,3HW0 = ,E10.3)
00090          C3 = (-(2.0 * S-A-B) * (B-A) * S * * 2 * 2 + ((S-A) * * 4-(S-B) * * 4))/(24.0 * S)
00091          DO 160 I = 1, N + 1
00092          SL(I) = SL(I) + (W0/EI) * ((2.0 * S-A-B) * (B-A) * XN(I) * * 2/(4.0 * S) + C3)
00093          Y(I) = Y(I) + (W0/EI) * ((2.0 * S-A-B ) * (B-A) * XN(I) * * 3/(12.0 * S) + C3 * XN(I))
00094          IF(XN(I).GT.A) GO TO 120
00095          GO TO 160
00096   120    SL(I) = SL(I)-(W0/EI) * (XN(I)-A) * * 3/6.0
00097          Y(I) = Y(I)-(W0/EI) * (XN(I)-A) * * 4/24.0
00098   130    IF(XN(I).GE.B) GO TO 150
00099          GO TO 160
```

```
00100  150    SL(I) = SL(I) + (W0/EI) * (XN(I)-B) * * 3/6.0
00101         Y(I) = Y(I) + (W0/EI) * (XN(I)-B) * * 4/24.0
00102  160    CONTINUE
00103 170      PRINT 27
00104          PRINT 28
00105 27       FORMAT(44H NODE    LOCATION    SLOPE    DEFLECTION)
00106 28       FORMAT(42H  NO         IN       IN/IN          IN)
00107          DO 305 I = 1, N + 1
00108          PRINT 29,I,XN(I),SL(I),Y(I)
00109  29      FORMAT(1H,I3.4X, F8.3, 4X, E10.3, 5X,E10.3)
00110  305     CONTINUE
00111 420      CONTINUE
00112          STOP
00113          END
```

13.13 一根型号为 W250×115 的简支梁 $I=190\times10^6\ \text{mm}^4$，$E=200\ \text{GPa}$，承受图 13-17 所示的集中和分布载荷作用. 利用例题 13.12 中的 FORTRAN 程序且令 $N=24$，求梁的挠度.

解 输入 E=200E+9,R=190E−6[已将给定的值转换成 m^4],S=18,N=24,NC=0,NP=1,A=12,B=18,W0=600,XP=6 和 P=8000. 计算机输出如下，由输出可知向下挠度峰值约为 27.2 mm.

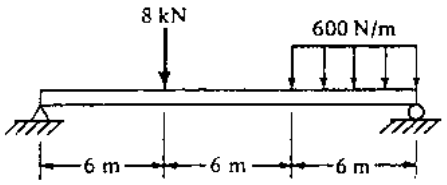


图 13-17

```
ENTER THE VALUES E,R,S,N,NC,NP:
? 200E+9, 190E-6,18,24,0,1
 ENTER THE VALUES A,B,W0:
? 12,18,600
ENTER ALL THE VALUES XP(I) & THEN ALL P(I):
? 6,8000
DEFLECTIONS OF A SIMPLY SUPPORTED BEAM
 E =   .200E+12  I =   .190E-03  L =   .180E+02
 CONCENTRATED FORCES-DOWNWARD IS POSITIVE
 LOCATION - IN              FORCE - LB
    6.000                    .800E+04
DISTRIBUTED LOADING-DOWNWARD IS POSITIVE
 A =     12.00  B =     18.000  W0 =     .600E+03
   NODE      LOCATION      SLOPE        DEFLECTION
    NO.          IN         IN/IN             IN
     1           .000   -.502E-02          .000E+00
     2           .750   -.497E-02          -.375E-02
     3          1.500   -.484E-02          -.744E-02
     4          2.250   -.462E-02          -.110E-01
     5          3.000   -.431E-02          -.143E-01
     6          3.750   -.392E-02          -.174E-01
     7          4.500   -.343E-02          -.202E-01
     8          5.250   -.286E-02          -.226E-01
     9          6.000   -.221E-02          -.245E-01
    10          6.750   -.152E-02          -.259E-01
    11          7.500   -.861E-03          -.268E-01
```

12	8.250	−.235E-03	−.272E-01
13	9.000	.361E-03	−.271E-01
14	9.750	.925E-03	−.266E-01
15	10.500	.146E-02	−.257E-01
16	11.250	.196E-02	−.245E-01
17	12.000	.244E-02	−.228E-01
18	12.750	.288E-02	−.208E-01
19	13.500	.328E-02	−.185E-01
20	14.250	.364E-02	−.159E-01
21	15.000	.395E-02	−.130E-01
22	15.750	.421E-02	−.998E-02
23	16.500	.439E-02	−.675E-02
24	17.250	.451E-02	−.340E-02
25	18.000	.455E-02	.347E-17

静不定系统

13.14　图 13-18 中的梁左端固结右端简支并受图示单个集中力的作用. 求所有约束反力分量.

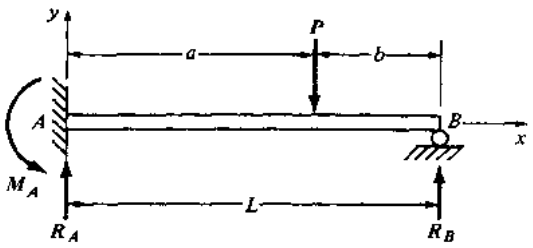


图 13-18

解　可以列出的方程有

$$\sum Fy = R_A + R_B - P = 0 \tag{1}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = -M_A + Pa - R_B L = 0 \tag{2}$$

于是我们有两个静力学方程但含三个未知量 R_A、R_B 和 M_A. 必须在梁的变形基础上再补充一个方程.

奇异函数在这种场合是理想的选择,利用它可将式(13.1)写成

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A\langle x\rangle - M_A\langle x\rangle^0 - P\langle x-a\rangle$$

积分两次得

$$EI\frac{dy}{dx} = R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - M_A\langle x\rangle - P\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{P}{2}\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + C_1x + C_2 \tag{3}$$

利用边界条件 $x=0$ 时,$dy/dx=0$ 和 $y=0$ 得 $C_1=C_2=0$.

还有第三个边界条件:$x=L$ 时,$y=0$. 将这一组值代入式(3)则给我们提供方程

$$0 = \frac{R_AL^3}{6} - \frac{M_AL^2}{2} - \frac{Pb^3}{6} \tag{4}$$

这个由梁的变形得到的方程就是所要的第三个方程. 现在联立求解(1)、(2)和(4)三个方程,得

$$R_A = \frac{Pb}{2L^3}(3L^2-b^2)\quad R_B = \frac{Pa^2}{2L^3}(2L+b)\quad M_A = \frac{Pb}{2L^3}(L^2-b^2)$$

13.15 图 13-19 中的悬臂梁由弹性常数为 k 的弹簧支撑并受单个集中力的作用. 求 B 点的挠度.

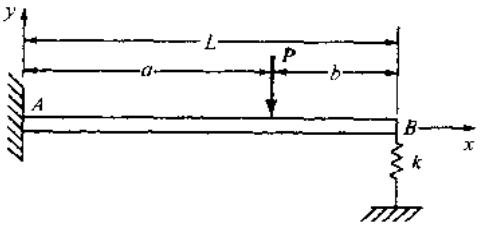


图 13-19

解 我们将弹簧作用力的大小记为 P_s. 于是所求的挠度 Δ_B 是力 $\boldsymbol{P}$ 引起的挠度与力 $\boldsymbol{P}_s$ 引起的挠度之和. 由(13.3)式,梁末端由作用于 a 处的力引起的挠度(无弹簧支撑时)为

$$EI[y]_{x=L} = -\frac{Pa^2L}{2} + \frac{Pa^3}{6}$$

再利用式(13.3),令 $a = x = L$,可求得 B 点由向上的弹力引起的挠度为 $P_sL^3/3EI$. 于是 B 点的挠度如图 13-20 所示.

因为梁对弹簧施加一大小为 P_s 的力,弹簧的收缩量为 P_s/k,如图 13-21 所示. 由于梁末端向下的位移必等于弹簧的净收缩,故

$$-\frac{P_s}{k} = \Delta_B = \left(-\frac{Pa^2L}{2} + \frac{Pa^3}{6}\right)\frac{1}{EI} + \frac{P_sL^3}{3EI} \tag{1}$$

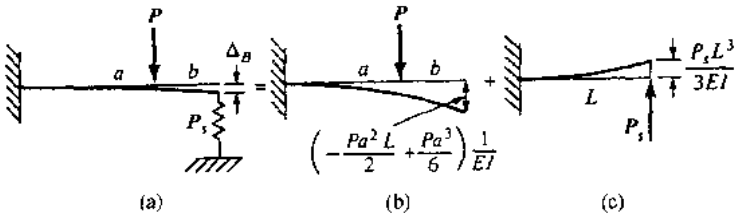


图 13-20

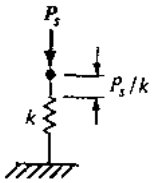


图 13-21

注意,在式(1)中,我们将弹簧的收缩表示为负值,因为弹簧的顶端向下,即 y 轴的负方向运动.

解式(1),得

$$P_s = \frac{\left(\frac{Pa^2L}{2} - \frac{Pa^3}{6}\right)\frac{1}{EI}}{\frac{1}{k} + \frac{L^3}{3EI}} \tag{2}$$

于是梁末端的挠度 Δ_s 为

$$\Delta_s = -\frac{P_s}{k} = \frac{-\frac{Pa^2L}{2} + \frac{Pa^3}{6}}{EI\left(1 + \frac{kL^3}{3EI}\right)} \tag{3}$$

若弹簧刚度无限大,即 $k \to \infty$,则式(3)的结果为 $\Delta_s = 0$. 在这种情况下,弹簧的约束反力与例题 13.14 的简支端一致,此时式(2)给出的结果与例题 13.14 求得的 R_B 一样.

13.16 图 13-22 中的悬臂梁 AB 在 B 端固结,其 A 端通过铰链由一个部分沉入水中的浮筒支撑. 梁的刚度为 EI,长为 L. 一垂直集中力 F 作用于 A 端. 求 B 端的约束反力矩.

解 本题是例题 13.15 的另一个形式. 当施加作用力 $\boldsymbol{F}$ 后,浮筒下沉一高度 Δ. 根据阿基米德定律,浮筒受力 $\boldsymbol{R}_A$ 的作用要向上浮起,该力的大小等于下沉 Δ 后所额外排开水的重量. 若浮筒的截面积为 A_0,水的单位体积重量为 γ,则

$$A_0\Delta\gamma = -R_A \tag{1}$$

在图 13-22 所示的坐标系中,由式(13.1)可写出

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -R_Ax - Fx$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = R_A\frac{x^2}{2} - F\frac{x^2}{2} + C_1 \tag{2}$$

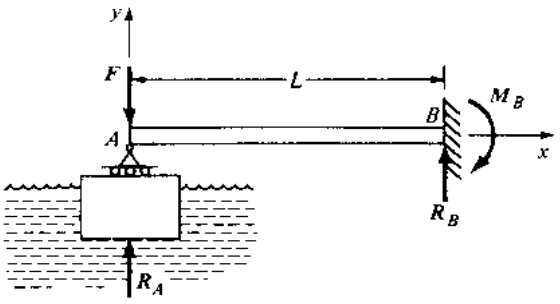


图 13-22

因为当 $x=L$ 时，$dy/dx=0$，所以由式(2)可知

$$C_1 = \frac{FL^2}{2} - \frac{R_A}{2}L^2$$

现在对式(2)积分，得

$$EIy = \frac{R_A}{2}\frac{x^3}{3} - \frac{F}{2}\frac{x^3}{3} + \left(\frac{FL^2}{2} - \frac{R_A}{2}L^2\right)x + C_2 \tag{3}$$

第二个边界条件为当 $x=L$ 时，$y=0$. 所以解得

$$C_2 = \frac{R_AL^3}{3} - \frac{FL^3}{3}$$

于是挠曲后梁的方程为

$$EIy = \frac{R_A}{6}x^3 - \frac{F}{6}x^3 + \left(\frac{FL^2}{2} - \frac{R_AL^2}{2}\right)x + \frac{R_AL^3}{3} - \frac{FL^3}{3} \tag{4}$$

我们要求的是在 $x=0$ 处的挠度 y. 由式(1)

$$y = \Delta = -\frac{R_A}{A_0\gamma}$$

在 $x=0$ 处，由式(4)可知

$$-\frac{R_AEI}{A_0\gamma} = \frac{R_AL^3}{3} - \frac{FL^3}{3} \text{ 或 } R_A = \frac{FL^3/3}{\frac{L^3}{3} + \frac{EI}{A_0\gamma}} \tag{5}$$

从式(5)可清楚地看出，当 $\gamma\to\infty$(相当于在 A 端由滚动圆柱支撑)，R_A 的大小接近于 F，这一点的确如此.

现在由对 B 端的力矩平衡，有

$$+\circlearrowleft \sum M_B = R_AL - FL + M_B = 0 \tag{6}$$

联立求解式(5)和(6)，得

$$M_B = \frac{3FLEI}{L^3A_0\gamma + 3EI}$$

13.17 考虑一根刚度为 EI 的无限长梁，初始时该梁完全与一刚性平面相接触. 在力 $2F$ 的作用下，梁上某点 A 向上升起脱离平面(见图 13 23). 求梁上与平面脱离接触部分的长

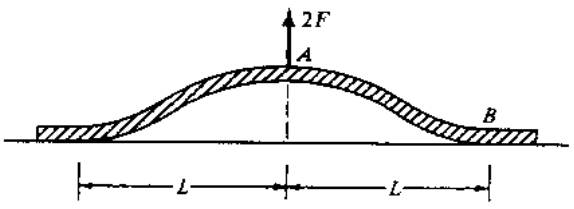


图 13-23

度 $2L$，梁的单位长度重为 W.

解 因为力 $2F$ 的垂直作用线是对称轴，我们仅需考虑作用线某一侧那部分的梁. 图 13-24 是部分梁，即对称轴与其右侧刚开始脱离平面点之间那部分梁的分离体图.

对图 13-24 有几点需加说明. 首先，只有力 F 作用于分离体左端. 同样，由对称性可知，在力 F 的作用点挠曲后梁的斜率必为零. 最重要的是，因为接触面是平的，B 点右侧梁的曲率为零. 于是，由式(13.1)立即可知 B 点以及 B 右侧所有点的弯矩必为零. 然而，在 B 点左侧被提起的梁上必定弯矩不为零，不为零的弯矩只能由作用于 B 的集中力产生. 该力在图 13-24 中标为 $\boldsymbol{R}_B$.

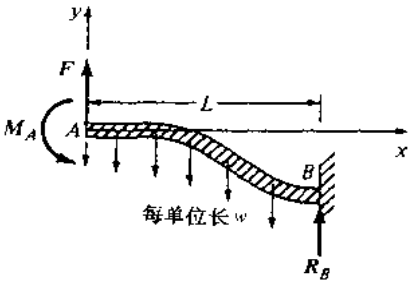


图 13-24

我们可以写出两个静力学平衡方程，但方程中包含三个未知量 R_B、L 和 M_A. 而且其中只有一个方程能给出直接的值，即

$$+\circlearrowright \sum M_B = -M_A - \frac{wL^2}{2} + FL = 0 \quad (1)$$

现在利用两次积分法. 由式(13.1)，可写出一般方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -wx\frac{x}{2} + Fx - M_A \quad (2)$$

将式(1)的 M_A 代入式(2)，得

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{wx^2}{2} + Fx + \left(\frac{wL^2}{2} - FL\right) \quad (3)$$

积分一次，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -\frac{w}{2}\frac{x^3}{3} + F\frac{x^2}{2} + \left(\frac{wL^2}{2} - FL\right)x + C_1 \quad (4)$$

一个边界条件是，当 $x=0$ 时，$dy/dx=0$，可解出 $C_1=0$.

我们不必进行第二次积分. 只需注意，当 $x=L$ 时，$dy/dx=0$，将这一关系代入式(4)，得

$$0 = -\frac{wL^3}{6} + \frac{FL^2}{2} + \frac{wL^3}{2} - FL^2$$

由此解得 $L=3F/2w$. 注意这个值与刚度 EI 无关.

13.18 图 13-25 中的加撑悬臂梁在其左半跨度上作用有均布载荷. 求梁中弯矩峰值.

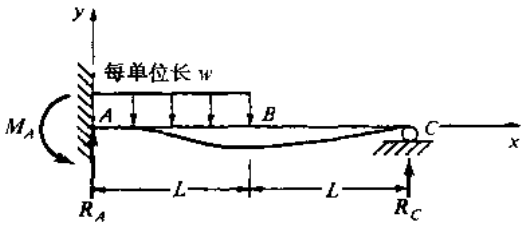


图 13-25

解 我们只能写出两个静力学平衡方程，其中包含三个未知量 R_A、R_C 和 M_A.

$$\sum F_y = R_A + R_C - wL = 0 \quad (1)$$

$$-\circlearrowright \sum M_C = -M_A + R_A(2L) - wL\left(\frac{3L}{2}\right) = 0 \quad (2)$$

因为载荷只分布在一部分梁上，应该可以利用奇异函数法寻得第三个方程. 如同例题 13.7 一样，我们必须十分小心地增加一项来消除 BC 段的载荷. 下面微分方程中的最后一项就是起这个作用.

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M_A\langle x\rangle^0 + R_A\langle x\rangle - \frac{w}{2}\langle x\rangle^2 + w\frac{\langle x-L\rangle^2}{2} \quad (3)$$

对式(3)积分，得

$$EI\frac{dy}{dx} = -M_A\langle x\rangle + R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - \frac{w}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} + \frac{w}{2}\frac{\langle x-L\rangle^3}{3} + C_1 \quad (4)$$

作为边界条件，我们有当 $x=0$ 时，$dy/dx=0$，将这一关系代入式(4)，得 $C_1=0$. 第二次积分得

$$EIy = -M_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{w}{6}\frac{\langle x\rangle^4}{4} + \frac{w}{6}\frac{\langle x-L\rangle^4}{4} + C_2 \quad (5)$$

作为第二个边界条件，我们有当 $x=0$ 时，$y=0$. 由此解得 $C_2=0$. 所以梁的挠度方程为

$$EIy = -\frac{M_A\langle x\rangle^2}{2} + \frac{R_A\langle x\rangle^3}{6} - \frac{w\langle x\rangle^4}{24} + \frac{w\langle x-L\rangle^4}{24} \tag{6}$$

第三个边界条件是，当 $x=2L$ 时，$y=0$. 将这一关系代入式(6)，得

$$0 = -\frac{M_A}{2}(2L)^2 + \frac{R_A}{6}(2L)^3 - \frac{w}{24}(2L)^4 - \frac{wL^4}{24} \tag{7}$$

联立求解(1)、(2)和(7)，得

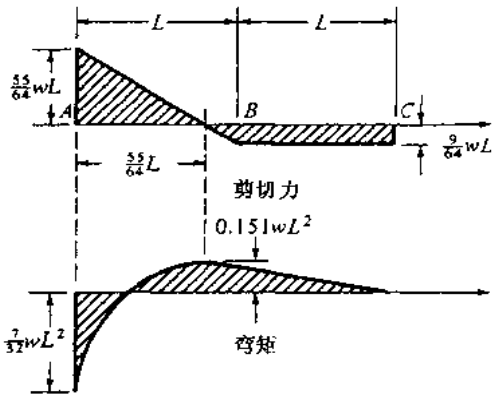


图 13-26

$$R_A = \frac{55}{64}wL,\quad R_C = \frac{9}{64}wL,\quad M_A = \frac{7}{32}wL^2 \tag{8}$$

利用这些数据，我们现在可以来画剪切力图和弯矩图(见图 13-26). 由式(3)和式(8)，AB 段的弯矩为

$$M = -\frac{7}{32}wL^2 + \frac{55}{64}wLx - \frac{wx^2}{2} \tag{9}$$

对式(9)微商，求得剪切力为零的点在 $x=\frac{55}{64}L$ 处. 在该点弯矩曲线的切线为水平线，弯矩的大小可求得为 $0.15wL^2$(正弯矩). 然而，墙上的约束反力矩 M_A 具有更大的绝对值 $7wL^2/32$，故这才是所求的弯矩峰值.

13.19　图 13-27 中的梁 AB 左端 A 固结，右端 B 作用有 1000 lb 的力. B 端没有载荷时，梁的末端与弹性常数为 300 lb/in 的线性弹簧顶端之间有一 0.3 in 的间隙. 梁是钢的，其 $E=30\times10^6$ lb/in^2，截面为 1 in × 1.5 in 的矩形. 求当 B 端承受载荷后弹簧中出现的力.

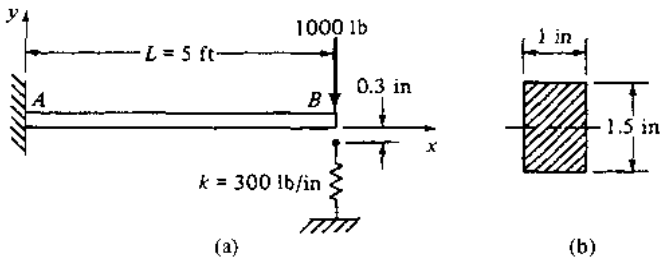


图 13-27

解　梁和弹簧的分离体图如图 13-28 所示. P_s 表示弹簧向上施加于梁的力，也是梁的末端向下施加在弹簧上的力.

我们能写出梁 AB 的两个静力学平衡方程：

$$\sum Fy = V_A + P_s - 1000 = 0 \tag{1}$$

$$+\circlearrowleft \sum M_A = -M_A + s(1000 - P_s) = 0 \tag{2}$$

因为式(1)和(2)含三个未知量 M_A、V_A 和 P_s，故必须补充一个变形关系. 可以利用式(13.2)得到由作用于 $a=L$ 处的垂直力引起末端($x=L$)出现挠度的方程：

$$3EIy = -PL^3 \tag{3}$$

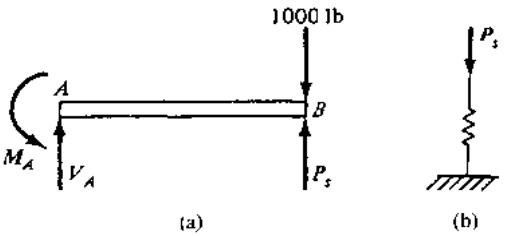


图 13-28

式(3)的 P 为向下作用于梁上净力的大小，图 13-28(a)表明净力为(1000 − P_1) lb. 同样，弹簧的压缩量为(P_1 lb)/(300 lb/in).

由式(3)，对 B 点有

$$y = \frac{-PL^3}{3EI} = \frac{-(1000 - P_1)(60\text{ in})^3}{3(30\times10^6\text{ lb/in}^2)(\frac{1}{12})(1\text{ in})(1.5\text{ in})^3} = -0.3\text{ in} - \frac{P_1}{300\text{ lb/in}}$$

解之，得 $P_1 = 694$ lb.

解出这个量，如果需要的话，我们也可以由式(1)和(2)解得余下的约束反力和力矩.

13.20 图 13-29 中的直梁 AB 在两端由线性弹簧支撑，同时在 B 端又有一扭力弹簧支撑. 线性弹簧的弹性常数分别为 k_A 和 k_B，而扭力弹簧(其作用是约束 B 端的角位移)的弹性常数为 k_T(在 SI 单位制中单位为每弧度牛顿米，在 USCS 单位制中为每弧度磅英寸). 距左端 a 处作用有一载荷 $\boldsymbol{P}$. 求梁上 A 点的挠度，梁的重量不计.

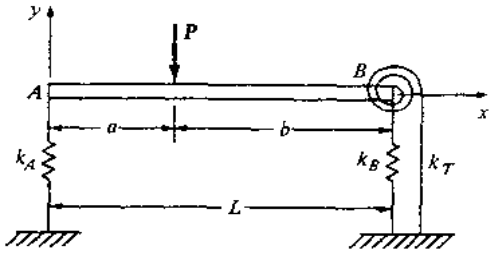


图 13-29

解 梁的分离体图如图 13-30 所示，图中线性弹簧施加于梁的力分别标为 $\boldsymbol{R}_A$ 和 $\boldsymbol{R}_B$. 假定梁的两端位移向下，所以必有

$$R_A = -k_A y_A \quad 和 \quad \boldsymbol{R}_B = -k_B y_B \tag{1}$$

其中 y_A 和 y_B 为 A、B 两端的位移，负号表示力的作用方向与位移反向. 由扭力弹簧产生的力矩 $\boldsymbol{M}_B$ 的方向必定如图 13-30 所示，因为扭力弹簧的性质决定了其阻力大小(即 M_B)随角 θ_B 的增大而增大. 所以有

$$M_B = k_T\theta_B \tag{2}$$

我们可以写出两个静力学平衡方程：

$$\sum Fy = R_A + R_B - P = 0 \tag{3}$$

$$+\circlearrowright \sum M_B = M_B + R_A L - Pb = 0 \tag{4}$$

将式(1)和(2)代入式(3)和(4)，得

$$y_A = \frac{1}{k_A}(-k_B y_B - P) \qquad y_B = \frac{1}{k_B}(y_A k_A + P) \tag{5}$$

和

$$\theta_B = \frac{1}{k_T}(k_A y_A L + Pb) = \frac{1}{k_T}(-k_B y_B L - Pa) \tag{6}$$

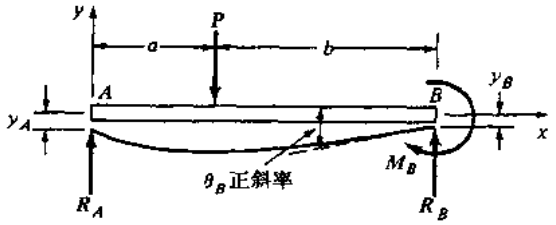


图 13-30

由奇异函数法和式(13.1)可列出方程

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = R_A\langle x\rangle - P\langle x-a\rangle \tag{7}$$

$$EI\frac{dy}{dx} = R_A\frac{\langle x\rangle^2}{2} - P\frac{\langle x-a\rangle^2}{2} + C_1 \tag{8}$$

$$EIy = \frac{R_A}{2}\frac{\langle x\rangle^3}{3} - \frac{P}{2}\frac{\langle x-a\rangle^3}{3} + C_1 x + C_2 \tag{9}$$

作为边界条件，我们有

1. 当 $x = 0$ 时，$y = y_A$；

2. 当 $x=L$ 时，$y=v_B$；

3. 当 $x=L$ 时，$\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=\theta_B$.

将上述关系代入式(8)和(9)，经过繁琐的代数运算解得

$$y_A=\frac{\dfrac{PEI}{Lk_B}-\dfrac{Pb^2}{2}-\dfrac{Pb^3}{6L}-\dfrac{PbEI}{k_T}}{\dfrac{EIk_AL}{k_T}+\dfrac{2}{3}k_AL^2+\dfrac{EI}{L}-\dfrac{EIk_A}{Lk_B}}$$

补 充 习 题

13.21　一悬臂梁的顶视图如图 13-31(a)所示. 梁的厚度恒定为 h，如图 13-31(b)所示. 求由作用于梁末端的集中力 P 引起作用点的挠度.

答案：$\dfrac{PL^3}{Eah^3}[15-24\ln(0.5)]$

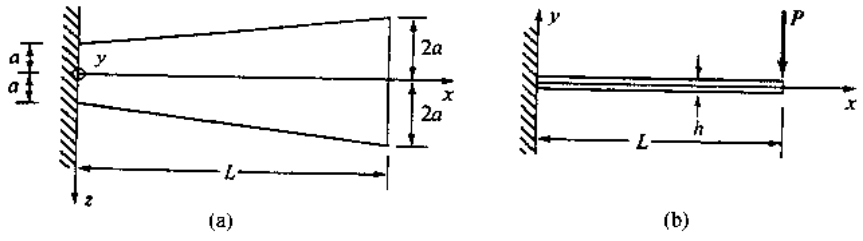


图 13-31

13.22　一悬臂梁从顶上看呈三角形，如图 13-32(a)所示；梁的厚度为恒值 h，如图 13-32(b)所示. 若每单位面积强度为 w 的载荷均匀分布在梁的表面，求梁末端的挠度.

答案：$wL^4/2Eh^3$

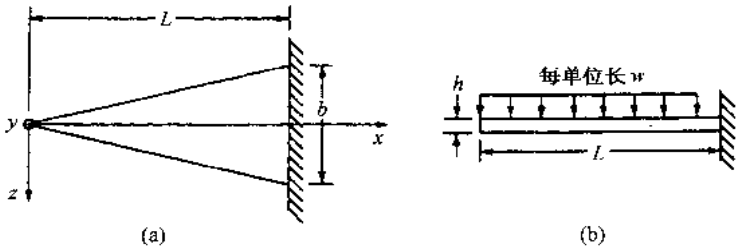


图 13-32

13.23　图 13-33 中的简支梁受强度均匀变化载荷的作用，求该梁的挠度曲线方程.

答案：$EIy=\dfrac{wL}{2}\left(-\dfrac{x^5}{60L^2}+\dfrac{x^3}{18}-\dfrac{7L^2x}{180}\right)$

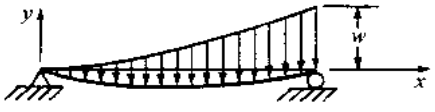


图 13-33

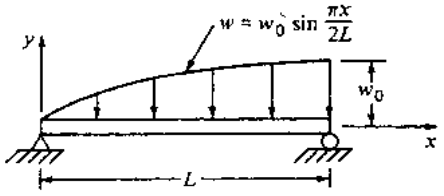


图 13-34

13.24　图 13-34 中的简支梁承受法向载荷，其单位长度的强度按四分之一正弦曲线的形式变化. 求梁的挠度

曲线方程.[提示:本从式(13.1)开始,而从 $EId^4v/dx^4 = -w$ 开始,该式可将式(13.1)微商两次再将式(7.1)和(7.2)代入其中的 w 和 V 而得.]

答案: $EIy = \dfrac{16w_0L^4}{\pi^4}\sin\dfrac{\pi x}{2L} + \dfrac{2Lw_0}{3\pi^2}x^3 - w_0L^3\left(\dfrac{16}{\pi^4} + \dfrac{2}{3\pi^2}\right)x$

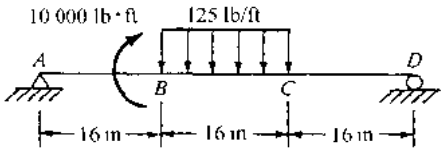


图 13-35

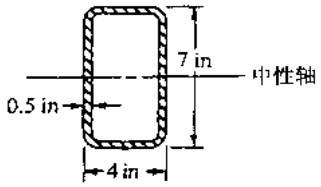


图 13-36

13.25 图 13-35 中的简支梁 AD 受如图所示一力偶和均布载荷作用.求其挠度曲线方程.

答案: $EIy = -402.8\langle x\rangle^3 + 5000\langle x-1.333\rangle^2 - 5.208\langle x-1.333\rangle^4 + 5.208\langle x-2.667\rangle^4 - 8185\langle x\rangle$

13.26 若例题 13.25 中的梁材是市场上出售的 TS-7×4 矩形管子,其横截面如图 13-36 所示.相对中性轴的惯性矩为 57.6 in^4, $E = 30\times10^6$ lb/in^2.求 B 点的挠度.

答案: -0.0116 in

13.27 图 13-37 中的梁截面恒定,在 A 和 B 两点简支,受图示两个集中力的作用.求 C 点的挠度.

答案: $PL^3/48EI$ 方向向上

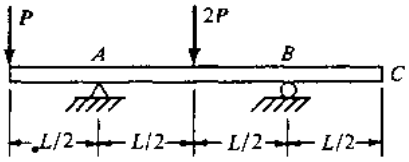


图 13-37

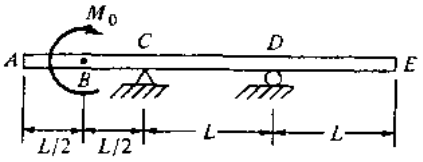


图 13-38

13.28 图 13-38 中的双悬臂梁在 C 和 D 简支.载荷就是单个力偶 M_0,作用位置如图所示.写出在该载荷作用下的挠度曲线方程.若梁材是直径 20 mm 圆截面的钛杆,其 $E = 115$ GPa, $L = 0.5$ m, $M_0 = 300$ N·m,求 E 端的挠度.

答案: $EIy = -\dfrac{M_0}{2}\langle x-\dfrac{L}{2}\rangle^2 - \dfrac{M_0}{6L}\langle x-L\rangle^3 + \dfrac{M_0}{6L}\langle x-2L\rangle^3 - \dfrac{5}{6}M_0L\langle x\rangle + \dfrac{17}{24}M_0L^2$; $y_E = 13.8$ mm

13.29 图 13-39 中的简支梁在 AB 段受向上作用均布载荷作用,另外还受两个力偶作用.求梁的挠度曲线方程.

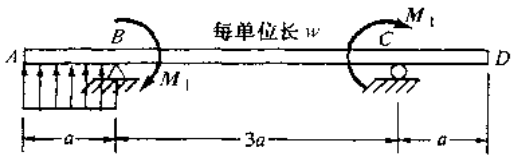


图 13-39

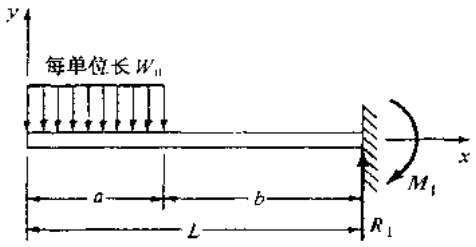


图 13-40

答案：$EIy=\frac{w}{24}\langle x\rangle^4-\left(\frac{M_1}{9a}+\frac{7}{36}wa\right)\langle x-a\rangle^3+\frac{M_1}{2}\langle x-a\rangle^2$

$-\frac{w}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{M_1}{2}\langle x-4a\rangle^2+\left(\frac{M_1}{9a}+\frac{wa}{36}\right)\langle x-4a\rangle^3$

$-(0.668wa^3+0.5M_1a)\langle x\rangle+0.626wa^4+0.5M_1a^2$

13.30　在例题 13.6 中，设梁截面型号为 W 250×58，$I=87.4\times10^6\ \text{mm}^4$，$M_1=60\ \text{kN·m}$，$a=3\ \text{m}$，$b=2\ \text{m}$. 求弯应力峰值以及力偶作用点的挠度.

答案：$\sigma=85.8\ \text{MPa}$；$y_B=1.37\ \text{mm}$(向上)

13.31　图 13-40 的悬臂梁在其部分长度上受均布载荷作用. 利用奇异函数求梁的挠度曲线方程.

答案：$EIy=-\frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{w_0}{6}(L^3-b^3)x+\frac{w_0}{24}(L^4-b^4)$

$-\frac{w_0L}{6}(L^3-b^3)$

13.32　利用奇异函数求图 13-41 中简支梁的挠度曲线方程，该梁受图示均匀变化载荷的作用. 同时求梁中点的挠度.

答案：$EIy=\frac{w_0L}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{60L}\langle x\rangle^5+\frac{w_0}{24L}\left\langle x-\frac{L}{2}\right\rangle^4-\frac{5}{192}w_0L^3x$；

$y_{L/2}=-\frac{w_0L^4}{120EI}$

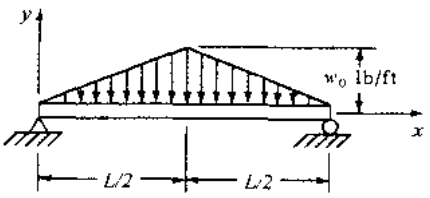


图 13-41

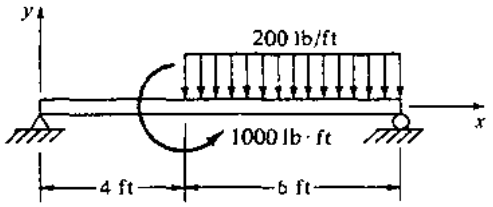


图 13-42

13.33　利用奇异函数求图 13-42 中梁的挠度曲线方程.

答案：$EIy=\frac{230}{3}\langle x\rangle^3-500\langle x-4\rangle^2-\frac{100}{12}\langle x-4\rangle^4-6930x$

13.34　利用奇异函数求图 13-43 中梁的挠度曲线方程.

答案：$EIy=-\frac{w_0a}{24}\langle x\rangle^3-\frac{w_0}{24}\langle x\rangle^4+\frac{w_0}{24}\langle x-a\rangle^4+\frac{w_0a^2}{2}\langle x-a\rangle^2$

$+\frac{9}{24}w_0a\langle x-2a\rangle^3+\frac{11}{48}w_0a^3x$

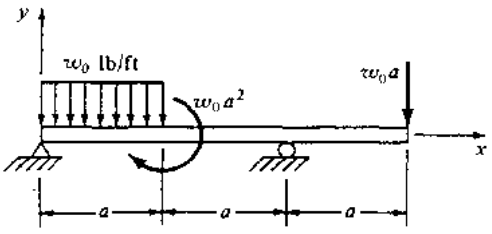


图 13-43

13.35　图 13-44 中的梁 AB 在 A 端通过销钉由漂在水里的浮筒支撑，B 端铰支. 单位长度强度为 q 的均布载荷作用于梁上. 求 A 点梁的斜率. 若梁的长度为 L 并有足够的刚度 EI，浮筒的截面积为 A_0，单位体积水的重量为 γ.

答案：$\frac{q}{2A_0\gamma}-\frac{qL^3}{24EI}$

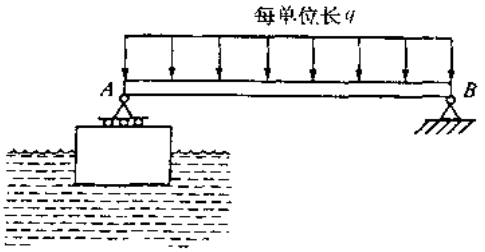


图 13-44

13.36 图 13-45 中的加撑悬臂梁 AD 受两个集中力的作用，求 D 端的垂直约束反力.

答案：$R_D = 2P/3$.

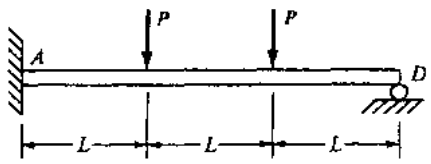


图 13-45

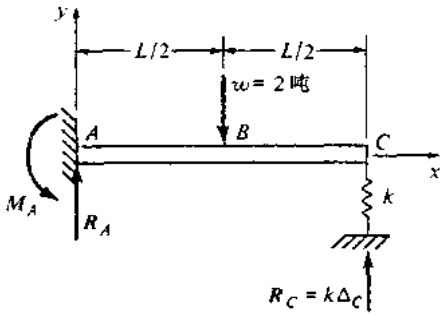


图 13-46

13.37 图 13-46 中的梁左端固结右端由弹簧支撑. 当梁不受载荷作用时，弹簧也不受力. 当 1 吨的垂直力作用于 C 点且不安弹簧时，该点的挠度为 2 in. 弹簧常数 k 为 1 吨/in. 求当 2 吨的载荷作用于中点 B 且梁有弹簧支撑时，C 点的挠度.

答案：5/12 in

13.38 一根很长的恒截面杆平放在刚性平面上. 一作用于杆一端的垂直力 $\boldsymbol{P}$ 使长为 L 的一段梁抬起来，即与平面脱离接触. 单位长度杆的重量为 w. 求梁与平面脱离接触那一段的长度 L，以及梁上被提起那一端的垂直挠度.

答案：$L = 2P/w$；$EIy_L = 2P^4/3w^3$

13.39 图 13-47 中的加撑悬臂梁 AC 在其右半段受均布载荷作用. 求支撑 C 的垂直约束反力.

答案：$R_C = \dfrac{7wL}{10}$

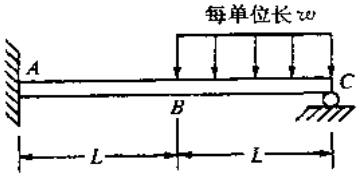


图 13-47

13.40 回到例题 13.6，假设 $M_1 = 4500$ lb·in，$a = 2$ ft，$b = 6$ ft，梁的截面为直径 1 in 的圆，$E = 30 \times 10^6$ lb/in^2. 利用例题 13.12 中的 FORTRAN 程序，求沿梁长度 25 个点上梁的挠度. 梁中点的挠度是多少?

答案：−1.32 in

第十四章　综合载荷：破坏理论和设计方法

到此为止，我们已经主要讨论了对结构部件施加单一类型载荷所引起的应力和变形，如一组作用于梁的法向集中力，或是作用于轴上的几个扭矩，然而实际情况往往是几种不同类型的载荷作用于同一部件上．一根轴同时受弯矩和扭矩的作用是常见的（见图14-1）．一根杆同时受轴向载荷和扭矩作用（见图 14-2），一个液体储存罐同时受内部流体静压和横向风压等（见图14-3）也是十分常见的．在每一种场合下，设计结构部件时必须考虑能同时承受多种载荷的作用．

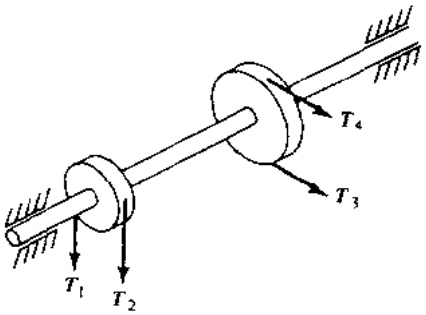


图 14-1

考虑综合载荷的设计远比单一类型载荷的设计复杂．这样的设计必须依靠实验来确定材料的力学性能，但要对所有可能的综合载荷来确定材料的性能是不可能的．于是，设计只能依赖简单的单一载荷（拉伸、压缩或剪切）试验确定的力学性能．这就提出了一个问题：如何将一个承受综合载荷作用的弹性体的强度与通过比较简单载荷确定的强度特征参数联系起来？将材料在各种综合载荷作用下的强度与简单的力学性能相联系的理论称为破坏理论．这样的理论（或准则）有很多，但我们只讨论三种最常用的——一种适用于脆性材料，另外两种适用于韧性材料．

破坏理论通常用主应力表示．于是在设计综合载荷

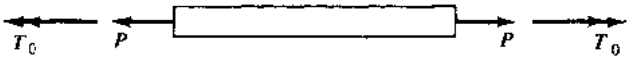


图 14-2

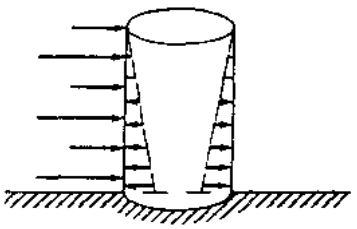


图 14-3

部件时，第一步就要确定部件上仔细选择的一个或多个关键点上的主应力．然后用第八章中概括的步骤来估算主应力（见例题 14.1 和 14.2）．

最大法向应力理论

根据这一理论，承受双轴向或三轴向拉伸应力的材料，当最大法向应力达到同一材料在简单拉伸试验中的破坏值时，就出现破坏．换一种说法，若是压缩载荷，则当最小法向应力达到在简单压缩试验中的破坏值时，就出现破坏．破坏通常定义为屈服或断裂——不论是哪一种先出现．这一理论与脆性材料的实验证据相当吻合．

最大剪切应力（特雷斯卡）理论

根据这一理论，承受双轴向或三轴向应力的材料，当最大剪切应力达到同一材料在简单拉伸或压缩试验中破坏值时，就出现破坏．利用第八章的概念可以证明，某一点上的最大剪切应

力为该点最大主应力与最小主应力差值的一半，而且总是出现在与主平面成45°角的斜面上．所以，若 σ_{yp} 表示材料在简单拉伸或压缩时的屈服点，则最大剪应力准则可表述为

$$\sigma_{\max} - \sigma_{\min} = \sigma_{yp} \tag{14.1}$$

在分析确定三个主应力中究竟是哪一个在上面方程等号左侧产生最大的差值，是必须加以判断的．(见例题 14.3 至 14.5)

胡贝尔-冯·米泽斯-亨奇(最大变形能)理论

对一个承受主应力 σ_1、σ_2、σ_3 的微元，该理论认为当

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2 = 2(\sigma_{yp}^2) \tag{14.2}$$

时，屈服就出现了，其中 σ_{yp} 为材料的屈服点．该理论对韧性材料的实验结果吻合极好．(见例题 14.4 和 14.6)

基于上述破坏理论的设计准则假设所有的载荷都是缓慢施加的(即不存在撞击或冲击载荷)，并且载荷是非周期性重复的．

例　题

14.1　一根直径 2 in 的轴承受 50 000 lb 的轴向压缩力以及 30 000 lb·in 的扭矩作用．求轴上的主应力和最大剪切应力．

解　轴向载荷引起均匀的压应力为

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = -\frac{50\,000\ \text{lb}}{(\pi/4)(2\ \text{in})^2} = -15\,900\ \text{lb/in}^2 \text{ 和 } \sigma_y = 0 \tag{1}$$

由式(11.1)，扭矩引起扭转剪切应力 $\tau = T\rho/J$．该应力在轴的外层纤维处最大，其值为

$$\tau_{xy} = \tau = \frac{Tc}{J} = \frac{(30\,000\ \text{lb}\cdot\text{in})(1\ \text{in})}{(\pi/32)(2\ \text{in})^4}$$

$$= 19\,100\ \text{lb/in}^2 \tag{2}$$

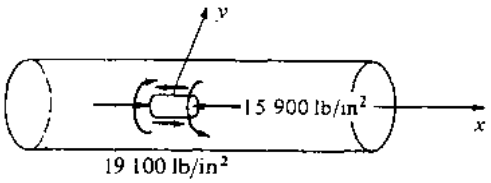


图 14-4

于是轴的外表面上的一个微元承受如图 14-4 所示的压应力和剪切应力．由式(8.5)，主应力为

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \tag{3}$$

将式(1)和(2)代入式(3)后解之，得

$$\sigma_{\max} = 12\,740\ \text{lb/in}^2, \qquad \sigma_{\min} = -28\,640\ \text{lb/in}^2$$

由例题 8.7 中的式(1)，最大剪应力为

$$\tau_{\max} = \pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} = \pm\sqrt{\left(\frac{-15\,900 - 0}{2}\right)^2 + (19\,100)^2}$$

$$= \pm 20\,690\ \text{lb/in}^2$$

14.2　图 14-5(a)中的轴以匀角速转动，皮带牵引产生综合的弯矩和扭矩．轴的直径 1.25 in．求轴中的主应力．轴和皮带轮的重量可忽略不计．假设轴承只施加集中的约束反力．

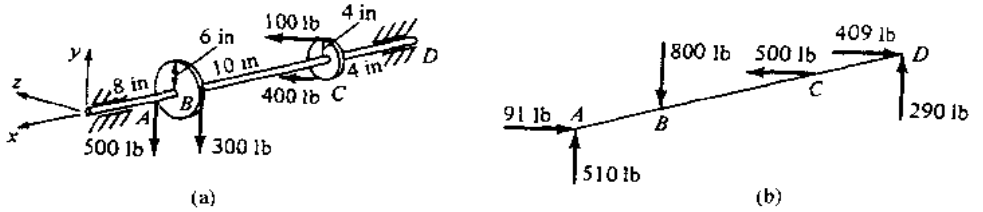


图 14-5

解 作用于轴上的横向力相互不平行，所以这些力产生的弯矩必须通过矢量相加才能得到它们的合弯矩．这种矢量相加只需在轴的长度上某些明显是关键的点上进行运算．载荷产生的弯矩以及约束反力如图 14.5(b)所示，这些力都认为通过轴的中心线．图 14-6 所示上、下有阴影线的图形分别是垂直面和水平面上的弯矩图．

B、C 两点的合弯矩大小分别为

$$M_B = \sqrt{(4080)^2 + (728)^2} = 4140 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

$$M_C = \sqrt{(1160)^2 + (1636)^2} = 2000 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

两皮带轮之间扭矩是恒定的，其大小为

$$T = (400 - 100)(4) = 1200 \text{ lb} \cdot \text{in}$$

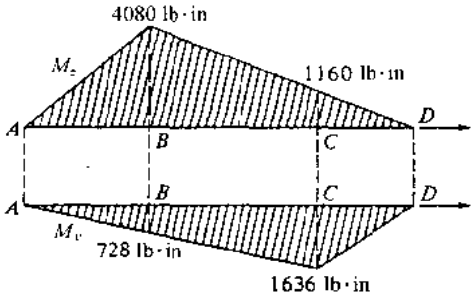


图 14-6

因为 B、C 两点的扭矩是一样的，最大应力出现在 B 点轴的外层纤维上，最大弯应力为

$$\sigma_x = \frac{My}{I} = \frac{(4140)(1.25/2)}{\pi(1.25)^4/64} = 21500 \text{ lb/in}^2, \qquad \sigma_y = 0$$

最大剪切应力出现在轴的外层纤维上，其值为

$$\tau_{xy} = \frac{T\rho}{J} = \frac{1200(1.25/2)}{\pi(1.25)^4/32} = 3100 \text{ lb/in}^2$$

由(8.5)式，考虑到 $\sigma_y = 0$，主应力为

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_x + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = 21500/2 + \sqrt{(21500/2)^2 + (3100)^2}$$

$$= 22\,000 \text{ lb/in}^2$$

$$\sigma_{\min} = \frac{1}{2}\sigma_x - \sqrt{\left(\frac{1}{2}\sigma_x\right)^2 + (\tau_{xy})^2} = 21500/2 - \sqrt{(21500/2)^2 + (3100)^2}$$

$$= -400 \text{ lb/in}^2$$

14.3 一个用作压力容器的封闭薄壁圆柱壳体平均直径 200 mm，壁厚 3 mm．壳体除了内压还承受 1 kN·m 的扭矩作用．若允许的工作拉、压应力为 160 MPa，利用最大剪应力理论求允许的最大内压．

解 由例题 10.1，我们知道圆周应力为

$$\sigma_c = \sigma_y = \frac{pr}{h} = \frac{p(100 \text{ mm})}{3 \text{ mm}} = 33.33p$$

而轴向应力为

$$\sigma_l = \sigma_x = \frac{pr}{2h} = \frac{p(100 \text{ mm})}{2(3 \text{ mm})} = 16.67p$$

其中 p 为未知的内压．由式(11.1)，扭转剪切应力为 $\tau = T\rho/J$，式中 J 为壳体截面的惯性极矩．根据定义，$J = \int \rho^2 da$，但对薄壁来说，对截面上的所有点的 ρ 基本是一样的，故可以将其提到积分号外面；因为 $\rho \approx r$，所以可得 $J \approx r^2 \int da$．而 $\int da$ 是薄壁壳体的截面积，近似等于 $2\pi rh$．这样，薄壁圆柱壳体的惯性极矩为

$$J \approx 2\pi r^3 h$$

于是扭转剪切应力为

$$\tau_{xy}=\frac{Tp}{J}=\frac{(1000N\cdot m)(0.1m)}{2\pi(0.1m)^3(0.003m)}=5.308\times10^6\ \mathrm{N/m^2}\ 或\ 5.308\ \mathrm{MPa}$$

由(8.5)式可得主应力为

$$\sigma_{1,2}=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2}=\frac{16.67p+33.33p}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{16.67p-33.33p}{2}\right)^2+(5.308\times10^6)^2} \tag{1}$$

因为要求利用最大剪切应力理论，需用到式(8.9)

$$\tau_{max}=\pm\frac{1}{2}(\sigma_{max}-\sigma_{min}) \tag{2}$$

重要的是要认识到该圆柱壳体上每一个微元承受的是二维应力．在圆周方向和轴向不仅有法向应力以及壳体壁面内的剪切应力，还有径向的法向应力，即与壳体壁面相垂直的应力．这些应力是变化的，在壁面外表面为零，在内壁上受压应力，大小等于内压．于是出现了下面的问题：在应用式(2)时，究竟该用哪一个最小法向应力 σ_{min}？我们必须考虑三种可能性：壳体外表面的零应力；壳体内壁的压应力，其大小等于内压；以及通过对式(1)取负号而得到的壁面中间的应力 σ_2．

在大多数(并非全部)涉及受压薄壁壳体的问题中，上述三种可能中的最后一种比较适用．于是由式(2)可得

$$2(160\times10^6)=\left\{\begin{array}{l}\dfrac{16.67p+33.33p}{2}+\sqrt{\left(\dfrac{16.67p-33.33p}{2}\right)^2+(5.308\times10^6)^2}\\ -\left[\dfrac{16.67p+33.33p}{2}-\sqrt{\left(\dfrac{16.67p-33.33p}{2}\right)^2+(5.308\times10^6)^2}\right]\end{array}\right\} \tag{3}$$

式(3)等号左边的 160×10^6 是给定的工作应力；之所以要在前面乘以因子 2 是因为，根据最大剪应力理论，当最大剪切应力达到在简单拉伸试验中破坏的剪切应力值时，双轴向或三轴向载荷作用下的材料就出现破坏，而这一应力值在第八章中已经知道恰为允许拉应力值的一半．

方程(3)可解得 $p=4.79$ MPa．检验另外两种假设可能的最小法向应力证明，它们所得的 p 值要大得多．自然，在三个值中最小的值 4.79 MPa 是所求的压力．

14.4　一个薄壁圆柱压力容器承受的内压为 600 lb/in^2．圆柱的平均半径为 15 in．若材料的屈服点为 39 000 lb/in^2，采用的安全系数为 3，利用(a)最大法向应力理论，(b)胡贝尔-米泽斯-亨奇理论求所需的壁厚．

解　☞ 圆周和径向应力在例题 10.1 中已求得．因为这些应力都是主应力，故有

$$\sigma_1=\sigma_r=\frac{pr}{h}=\frac{600(15)}{h}=\frac{9000}{h}$$

$$\sigma_2=\sigma_t=\frac{pr}{2h}=\frac{600(15)}{2h}=\frac{4500}{h}$$

第三个主应力是变化的，在壳体外表为零，在壳体内壁的值为 $-p$．在薄壁设计中习惯的做法是忽略这第三个分量，所以我们假设 $\sigma_3=0$．

(a)利用最大法向应力理论可得

$$\frac{9000}{h}=\frac{39\,000}{3}$$

解得 $h=0.69$ in．

(b)利用胡贝尔-米泽斯-亨奇理论，由式(14.2)可得

$$\left(\frac{9000}{h}-\frac{4500}{h}\right)^2+\left(\frac{4500}{h}-0\right)^2+\left(\frac{9000}{h}-0\right)^2=2\left(\frac{39\,000}{3}\right)^2$$

解得 $h=0.60$ in．

14.5　一根水平轴的末端伸出系列轴承的最后一个轴承之外(其作用相当于一悬臂梁)，并承受 36 kN 垂直力的作用，如图 14-7 所示．同时轴上还作用有扭矩 T_0．若允许的拉伸和压缩工作应力为 150 MPa，在最大剪切应力理论基础上求 T_0 的最大允许值．

解　☞ 对弯曲效应的分析表明，在支撑点 A 的最上层和最下层的微元上拉应力和压应力分别达到最大值．由式(12.3)，弯应力(拉伸)峰值为

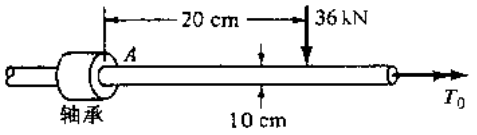


图 14-7

$$\sigma_x = \frac{MC}{I} = \frac{(36\times10^3\ \text{N})(0.20\ \text{m})(0.05\ \text{m})}{(\pi/64)(0.10\ \text{m})^4}$$
$$= 73.3\times10^6\ \text{N/m}^2 \qquad (1)$$

而 $\sigma_y = 0$.

由式(11.1),外层纤维上的扭转剪切应力为

$$\tau = \frac{T\rho}{J} = \frac{T_0(0.05\ \text{m})}{(\pi/32)(0.10\ \text{m})^4} = 5093T_0 \qquad (2)$$

因为轴的外层纤维上没有额外的载荷,我们只考虑 A 点轴的最外层纤维上受二维载荷的一个微元. 于是由式(8.5)给出主应力为

$$\sigma = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau^2} \qquad (3)$$

将式(1)、(2)代入式(3),并利用 $\sigma_y=0$,可得

$$\sigma_{1,2} = \frac{73.3\times10^6+0}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{73.3\times10^6-0}{2}\right)^2+(5093T_0)^2}$$

式(8.9)给出的最大剪切应力为 $\tau_{\max} = \pm\frac{1}{2}(\sigma_{\max}-\sigma_{\min})$,该式变为

$$\left\{\frac{73.3\times10^6}{2}+\sqrt{\left(\frac{73.3\times10^6}{2}\right)^2+(5093T_0)^2}\right.$$
$$\left.-\left[\frac{73.3\times10^6}{2}-\sqrt{\left(\frac{73.3\times10^6}{2}\right)^2+(5093T_0)^2}\right]\right\}\Big/2 = \frac{150}{2}\times10^6$$

解之,得 $T_0 = 12.84\ \text{kN}\cdot\text{m}$.

14.6 一根实心圆截面杆的根部固结在 x,y,z 坐标系的原点上(见图 14-8). 杆的直径 20 mm,有一段被弯折,所以 CD 段在 xy 平面内且平行于 x 轴,而余下的部分 OC 段沿 y 轴. 在 D 点有一作用力 $\boldsymbol{P}$,该力在平行 yz 平面的平面内且在方向上低于 z 轴 25°. 杆材的曲服点为 200 MPa. 求造成 A 点曲服的力 $\boldsymbol{P}$ 的大小,A 点在 z 轴上,其坐标为(0,0,10). 利用胡贝尔-米泽斯-亨奇理论.

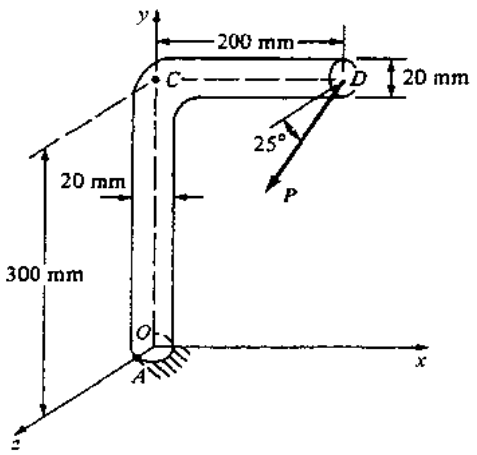


图 14-8

解 首先来确定力 $\boldsymbol{P}$ 沿 y 和 z 轴的分量,然后分析它们的效应. 这两个力为

$$P_y = -P\sin25^\circ = -0.423P$$
$$P_z = P\cos25^\circ = 0.906P$$

在 A 点,分量 P_y 产生的直接轴向压应力为

$$\sigma'_y = -\frac{0.423P}{(\pi/4)(0.02)^2} = -1346P$$

分量 P_y 使垂直段 OC 相对 x 轴弯曲. 这就是说,x 轴起中性轴的作用. 所以压应力峰值出现在 A 点(压应力矢量指向 y 轴负向)该压应力为

$$\sigma''_y = \frac{Mc}{I} = \frac{-0.906P(0.300)(0.010)}{(\pi/64)(0.02)^4}$$
$$= (-0.346\times10^6)P$$

于是,A 点的净压应力为 $\sigma_y = \sigma'_y+\sigma''_y = -347.346P$

分量 P_z 也产生相对 y 轴的扭矩. 在 xz 平面内的扭转剪切应力为

$$\tau_{xz} = \frac{(0.906P)(0.200)(0.010)}{(\pi/32)(0.02)^4} = (0.115\times10^6)P$$

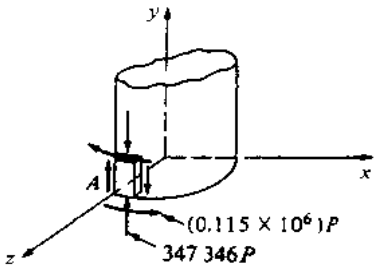


图 14-9

最后，我们注意到在 z 方向并无载荷作用，所以在 A 点 $\sigma_z=0$. 于是 A 点的应力如图 14-9 所示. 因为在 z 方向上没有应力出现，故这是一个二维应力的情形，我们可利用式(8.5)写出主应力为

$$\sigma=\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_{xy}^2}$$

将求得的 σ_y 和 τ_{xy} 及 $\sigma_x=0$ 代入上面方程，求得

$$\sigma_{max}=\sigma_1=(0.380\times10^6)P$$

和

$$\sigma_{min}=\sigma_3=(-0.032\times10^6)P$$

还有如上面已指出的 $\sigma_z=\sigma_2=0$.

现在，将已算出的 σ_1、σ_2 和 σ_3 的值以及 $\sigma_{yp}=200$ MPa 代入式(14.2)，可求得 $P=499$ N.

补充习题

14.7　求图 14-10 所示受一偏心拉力作用的长方体中最大拉应力.

答案：1200 lb/in^2

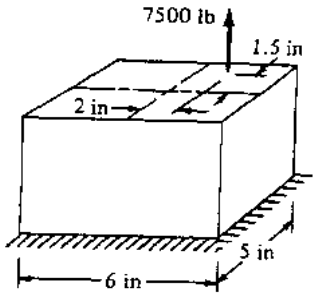


图 14-10

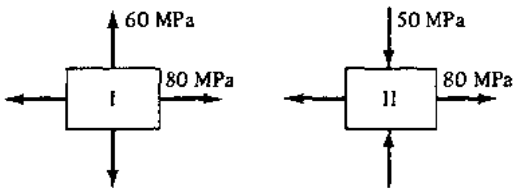


图 14-11

14.8　一铸铁机械零件的拉伸强度为 300 MPa，压缩强度为 800 MPa. 在图 14-11 所示的两种载荷下，利用(a)最大法向应力理论，(b)最大剪切应力理论，(c)胡贝尔-米泽斯-亨奇理论求安全系数.

答案：Ⅰ：(a)3.75，(b)3.75，(c)4.17；Ⅱ：(a)3.75，(b)2.31，(c)2.64

14.9　一根直径 50 mm 的轴承受 200 kN 的轴向拉力以及 4 kN·m 的扭矩作用. 求轴中主应力和最大剪切应力.

答案：$\sigma_{max}=273$ MPa；$\sigma_{min}=-69$ MPa；$\tau=171$ MPa

14.10　一根实心圆轴承受 2 kN·m 的扭矩以及 3 kN·m 的弯矩作用. 轴的直径为 100 mm. 求轴中主应力和最大剪切应力.

答案：$\sigma_{max}=33.7$ MPa；$\sigma_{min}=-3.1$ MPa；$\tau=18.4$ MPa

14.11　一薄壁圆柱壳体承受 50 000 lb 的轴向压力以及 30 000 lb·in 的扭矩作用. 圆柱直径为 12 in，壁厚 0.125 in. 求壳体中主应力和最大剪切应力. 壳体翘曲的可能性不予考虑.

答案：$\sigma_{max}=120$ lb/in^2；$\sigma_{min}=-10\,680$ lb/in^2；$\tau=5400$ lb/in^2

14.12　图 14-12 中的轴以匀角速转动并承受由皮带牵引引起的弯矩和扭矩综合载荷. 轴和皮带轮的重量可

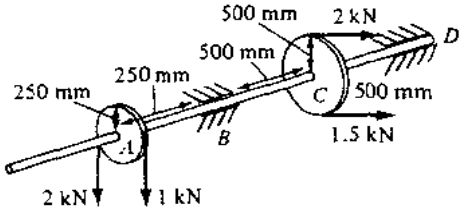


图 14-12

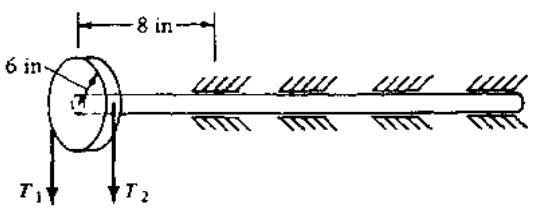


图 14-13

忽略不计.轴承约束反力只是集中力.轴的直径 50 mm.求轴中主应力.

答案:$\sigma_{max}=147.7$ MPa;$\sigma_{min}=-0.7$ MPa

14.13 一根被轴承组支撑的轴以 200 rpm 的转速传递 12 马力的功率(见图 14-13).轴的末端伸出最靠左的轴承 8 in,并支撑一 50 lb 的皮带轮和拉力比为 1∶2 的皮带牵引.若工作拉应力为 20 000 lb/in^2.在最靠左轴承的应力条件下,求轴所允许的最小直径(应用最大剪切应力理论)

答案:1.60 in

14.14 一根直径 6.5 cm 的实心钢轴承受 1600 N·m 的弯矩和扭矩 T.材料的拉伸屈服点为 425 MPa,安全系数采用 1.5,应用最大剪切应力准则求允许的扭矩.

答案:$T=7.44$ kN·m

14.15 应用胡贝尔-米泽斯-亨奇准则再解 14.14 题.

答案:8.5 kN·m

14.16 一根直径 3.5 in 的实心钢轴承受 55 000 lb·in 的扭矩和 12 500 lb·in 的弯矩.求主应力.若材料的拉伸屈服点为 44 000 lb/in^2,应用最大剪切应力理论求安全系数.

答案:3.28

14.17 应用胡贝尔-米泽斯-亨奇准则再解例题 14.5.

答案:14.8 kN·m

第十五章　柱

承受轴向压力的细长杆称为柱.有些作者只将垂直杆称为柱,将斜杆称为撑.我们将在比较一般的意义上使用这一术语.

柱的应用很普遍,许多飞机的结构部件,太空飞行器上各级助推器间的连接结构,某些桥梁桁架构件和建筑物框架结构中都采用柱.摆动和往复机械的行为类似于柱,尤其涉及到破坏时.

柱的破坏

柱是由屈曲,即杆的横向变形而遭破坏的.(作为对比,短的受压件是由材料曲服而遭破坏.)柱的屈曲和由此遭破坏可以发生在杆中最大应力甚至低于材料的曲服点时.

长细比

柱的长度与其截面积最小回转半径之比称为柱的长细比.这一比值是无量纲的.确定截面积回转半径的方法已在第六章讨论过了.

如果柱的每一端都不能转动,则屈曲一般发生在回转半径最小的轴上.

临界载荷

承受轴向压力的细长杆的临界载荷是使杆刚够保持略微变形形状的轴向压力值.图 15-1 即为在临界载荷 P_{cr} 作用下一根两端铰接杆发生屈曲的形状.

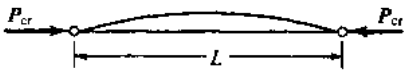


图 15-1

若恒截面的细长杆两端铰接并承受轴向压力(见图 15-1),则产生屈曲的临界载荷为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \qquad (15.1)$$

其中 E 为弹性模量,I 为截面积相对通过形心轴的最小第二类矩(惯性矩),L 为杆的长度.

公式(15.1)是瑞士数学家莱昂哈德·欧拉(1707—1783)首先得到的,所以载荷 P_{cr} 称为欧拉屈曲载荷.正如例题 15.1 所要讨论的,这个公式不是立即可以应用的,假若相应的轴向应力(该应力可由公式 $\sigma_{cr} = P_{cr}/A$ 求得,其中 A 为杆的截面积)超过材料的比例极限的话.例如,对一根比例极限为 210 MPa 的钢杆,式(15.1)仅对细长比超过 100 的柱有效.该公式表示的 P_{cr} 值是破坏载荷,所以必须引入安全系数来得到设计载荷(见例题 15.3 至 15.5).

对不同于图 15-1 所示的支撑,欧拉公式(15.1)可修正为

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(KL)^2} \qquad (15.2)$$

其中 KL 为柱的有效长度,该长度定义为屈曲杆上两个对应于零曲率点之间的一段杆长.例如,对两端铰接的柱,$K=1$.若两端刚性固结,$K=0.5$.若一端固结另一端铰接,$K=0.7$.对载荷作用在自由端的悬臂形柱,$K=2$.

非弹性柱的屈曲

用切线模量取代杨氏模量可将方程式(15.1)扩展到非弹性作用区.所得的切线模量公式为

$$P_{cr}=\frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \tag{15.3}$$

切线模量实际是应力-应变曲线在非弹性区的斜率(图 15-2 中 A 点右侧). E_t 明显随应变变化,所以必须由材料试验来确定.

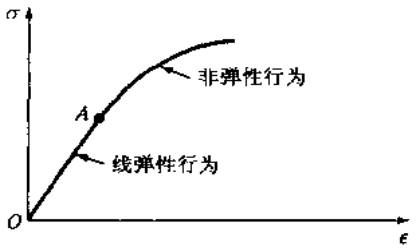


图 15-2

当运用式(15.3)时,屈曲即将发生前的轴向应力由下式确定

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} \tag{15.4}$$

这是切线模量公式的另一形式;载荷 $P_{cr}=A\sigma_{cr}$ 通常称为恩盖塞载荷. 该方法(见例题 15.7)指出了一个比实验测得的非弹性曲屈载荷略小的载荷. 这一理论有一些矛盾之处,(本书不讨论这个问题)所以对合理的柱的设计并不是最好的方法.

对轴向受压杆的试验形成了三种破坏模式. 第一种,短柱的压缩曲服,这在第九章已讨论过了. 第二种,欧拉柱行为,将在本章例题 15.1 中阐述. 第三种是中等长度杆的非弹性屈曲以及这一类杆的合理设计,将在例题 15.7 至 15.10 中讨论.

具有中等长细比柱的设计公式

具有大长细比受压杆件的设计建立在式(15.1)基础上,再引入适当的安全系数,对较短受压杆件的设计. 习惯做法是在很多联系曲服应力和杆的长细比的半经验关系式中采用其中的一个.

对钢柱,一个通常采用的设计公式是由美国钢材结构研究所(AISC)提出的,该公式给出的对具有长细比 L/r 的钢柱与允许(工作)轴向应力 σ_a 的关系为

$$\sigma_a=\begin{cases}\dfrac{\left[1-\dfrac{(KL/r)^2}{2C_C^{\,2}}\right]\sigma_{yp}}{\dfrac{5}{3}+\dfrac{3KL/r}{8C_C}-\dfrac{(KL/r)^3}{8C_C^{\,3}}}, & \text{当}\dfrac{KL}{r}<C_C\text{ 时}\\[2ex] \dfrac{\pi^2 E}{\dfrac{23}{12}\left(\dfrac{KL}{r}\right)^2}, & \text{当}\dfrac{KL}{r}>C_C\text{ 时}\end{cases} \tag{15.5}$$

其中

$$C_C=\sqrt{\frac{2\pi^2 E}{\sigma_{yp}}} \tag{15.6}$$

σ_{yp} 为材料的屈服点,E 为杨氏模量(见例题 15.8).

铝柱的设计通常遵照铝材行业协会的规范. 允许应力的设计公式考虑到诸如铝合金类型、热处理和回火等细节. 例如,对于 6061-T6 型号的铝合金,允许轴向压应力的设计公式如下:

SI 单位制

$$\sigma_a=\begin{cases}131\text{ MPa}, & \text{当 } 0<\dfrac{L}{r}\leqslant 9.5\text{ 时}\\[2ex] \left(139-0.869\dfrac{L}{r}\right)\text{ MPa}, & \text{当 } 9.5<\dfrac{L}{r}\leqslant 66\text{ 时}\\[2ex] \dfrac{352\,000}{(L/r)^2}\text{ MPa}, & \text{当}\dfrac{L}{r}>66\text{ 时}\end{cases} \tag{15.7}$$

USCS 制

$$\sigma_a=\begin{cases}19\,000\ \text{lb/in}^2, & \text{当 } 0<\dfrac{L}{r}\leqslant 9.5 \text{ 时}\\ \left(20\,200-126\dfrac{L}{r}\right)\text{lb/in}^2, & \text{当 } 9.5<\dfrac{L}{r}\leqslant 66 \text{ 时}\\ \dfrac{51\,000\,000}{(L/r)^2}\ \text{lb/in}^2, & \text{当 } \dfrac{L}{r}>66 \text{ 时}\end{cases}\tag{15.8}$$

这些允许应力(指即将开始屈曲前的应力)包括安全系数在内,根据长细比,安全系数约在1.60至2.25范围内变化.

弹簧支撑刚性杆的屈曲

上面讨论的柱是柔性杆件,它们在屈曲后立即经受横向弯曲.一种相关的屈曲类型涉及到一根或多根与固定支撑铰接的刚性杆,或刚性杆相互铰接并由一根或多根横向弹簧支撑.在某种情况下,施加的载荷会使这样的杆系突然移动到另一个平衡位置.正如柱的屈曲,这是一种失稳的形式.

例 题

15.1 求方程式15.1所分析的柱中的轴向应力

解 在推导(13.1)式(我们利用该式来确定临界载荷式(15.1))时,我们假定应力与应变之间存在线性关系.这样,只有在不超过材料的比例极限时,临界载荷式(15.1)才是正确的.

在杆刚要呈现其屈曲形状前杆中的轴向应力为

$$\sigma_{cr}=P_{cr}/A\tag{1}$$

其中 A 为杆的截面积.将式(15.1)的 P_{cr} 代入上式,得

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2EI}{AL^2}\tag{2}$$

但由第六章我们知道 $I=Ar^2$,其中 r 表示截面积的回转半径.将此式代入式(2),得

$$\sigma_{cr}=\frac{\pi^2EAr^2}{AL^2}=\pi^2E\left(\frac{r}{L}\right)^2 \text{ 或 } \sigma_{cr}=\frac{\pi^2E}{(L/r)^2}\tag{3}$$

其中比值 L/r 为柱的长细比.

我们来考虑一根比例极限为210 MPa,$E=200$ GPa的钢柱.应力210 MPa标志(3)式也许会用到的应力上限.为了求得对应于这些常数的 L/r 值,我们将这些数代入式(3),得

$$210\times10^6=\frac{\pi^2(200\times10^9)}{(L/r)^2}\quad \text{或}\quad \frac{L}{r}\approx 100$$

于是对这种材料,由式(15.1)确定的屈曲载荷和由式(3)确定的轴向应力只有当柱的 $L/r\geqslant100$ 时才成立.对于 $L/r<100$ 的柱,在弹性屈曲发生之前压应力已超过比例极限,上面的方程式也就不成立.

按方程式(3)作的曲线如图15-3所示.对于上面假定的特定比例极限值和弹性模量,A 点是可以被应用曲线段上限的标志.

15.2 一根两端固结并在每一端受轴向压力作用的长细杆,求其临界载荷.

解 临界载荷即是刚够保持杆略微变形形状(如图15-4所示)的轴向压力 P.杆两端的力矩 M_0 表示约束对柱的作用,该力矩阻止杆两端的角位移.

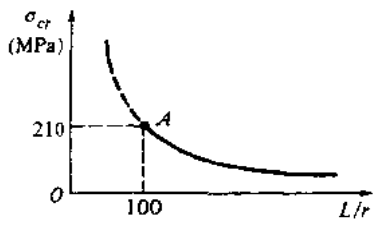


图15-3

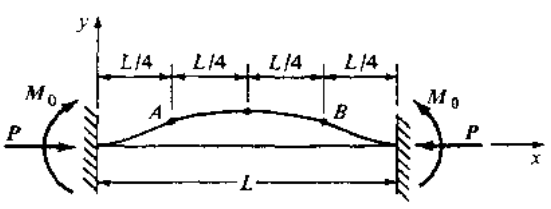


图15-4

检查已屈曲柱的挠度曲线发现，杆的中段，即 A、B 两点之间的部分对应于图 15-1 中两端铰接柱的挠度曲线. 所以对两端固定的柱，其 $L/2$ 的长度对应于全长为 L 的两端铰接的杆. 于是两端固定杆的临界载荷可将式(15.1)中的 L 替换成 $L/2$ 而求得.

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(L/2)^2} = \frac{4\pi^2 EI}{L^2}$$

上面这个公式在这里是通过直觉推导出来的，也可以通过利用弯曲杆的微分方程更严格地推导.

15.3 一根 40 mm×50 mm 的矩形截面钢杆两端铰接并受轴向压力作用. 若材料的比例极限为 230 MPa，$E = 200$ GPa，求最短长度，在此长度下欧拉方程(15.1)可以用来确定屈曲载荷.

解 最小的第二类矩为 $I = \frac{1}{12}bh^3 = \frac{1}{12}(50)(40)^3 = 2.67\times10^5\ \text{mm}^4$. 于是最小回转半径为

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{2.67\times10^5}{(40)(50)}} = 11.5\ \text{mm}$$

对这种受轴向载荷作用的杆在屈曲前的轴向应力已在例题 15.1 中求得了，即

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 E}{(L/r)^2} \tag{1}$$

令式(1)中的 $\sigma_{cr} = 230$ MPa. 则欧拉方程可以应用的最小长度可求得为

$$230\times10^6 = \frac{\pi^2(200\times10^9)}{(L/11.5)^2} \quad 或 \quad L = 1.065\ \text{m}$$

15.4 若例题 15.3 中的杆长 2 m，利用欧拉公式求屈曲载荷.

解 截面积的最小第二类矩已在例题 15.3 中求得为 $2.67\times10^5\ \text{mm}^4$. 应用式(15.1)，求得

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(200\times10^9)(10^{-6})(2.67\times10^5)}{(2\times10^3)^2} = 132\ \text{kN}$$

15.5 利用式(15.1)求 W10×21 截面两端铰接柱的临界载荷.

解 由表 12-1 查得最小惯性矩为 $9.7\ \text{in}^4$. 所以

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2} = \frac{\pi^2(30\times10^6\ \text{lb/in}^2)(9.7\ \text{in}^4)}{(144\ \text{in})^2} = 138\,000\ \text{lb}$$

15.6 长细杆 AB 长 L，刚度为 EI，并在 A 端铰接；在 B 端大小为每弧度 λ 的恢复力矩阻止该端转动. 无论是 A 还是 B 端都不能产生横向位移，但 A 端可以自由地向 B 端靠拢. 推导描述产生屈曲的轴向载荷 P 的方程式.

解 已屈曲的杆如图 15-5 所示，其中 M_L 表示恢复力矩. 已屈曲杆的微分方程为

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = Vx - Py \quad 或 \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EI}y = \frac{V}{EI}x$$

令 $\alpha^2 = P/EI$，于是上述后一个方程变为.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \alpha^2 y = \frac{V}{EI}x$$

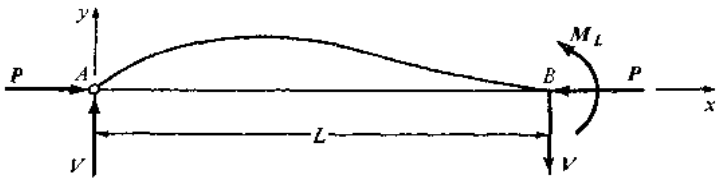


图 15-5

该方程的一般解很容易求得为

$$y = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{V}{P}x \tag{1}$$

我们有边界条件，当 $x = 0$ 时，$y = 0$. 于是 $B = 0$. 我们还有一个边界条件，当 $x = L$ 时，$y = 0$. 于是由式

(1)得

$$0 = A\sin\alpha L + \frac{VL}{P} \quad 或 \quad \frac{V}{P} = -\frac{A}{L}\sin\alpha L$$

这样

$$y = A\left(\sin\alpha x - \frac{1}{L}\sin\alpha L\right) \tag{2}$$

由(2)式,在 $x = L$ 处的斜率可求得为

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]_{x=L} = A\left(\alpha\cos\alpha L - \frac{1}{L}\sin\alpha L\right)$$

由 λ 的定义,我们可知 B 端的恢复力矩为

$$M_L = A\lambda\left(\alpha\cos\alpha L - \frac{1}{L}\sin\alpha L\right) \tag{3}$$

同样,因为一般来说 $M = EI(d^2y/dx^2)$,由式(2)有

$$M_L = -A\alpha^2 EI\sin\alpha L \tag{4}$$

将(3)(4)两式合并,注意到随 M_L 的增大,B 点的 dy/dx 减小(必须加负号),所以有

$$-A\alpha^2 EI\sin\alpha L = -A\lambda\alpha\cos\alpha L + \frac{A\lambda}{L}\sin\alpha L$$

简化后为

$$\frac{PL}{\lambda} - \alpha L\cot\alpha L + 1 = 0$$

上面这个方程需要在给定 EI,L 和 λ 的值后进行数值求解.

15.7 一根两端铰接的实心圆截面柱长 275 mm,必须承载 250 kN 的轴向载荷.利用切线模量理论和图 15-6 联系切线模量与轴向应力的实验曲线,求柱的最小半径.

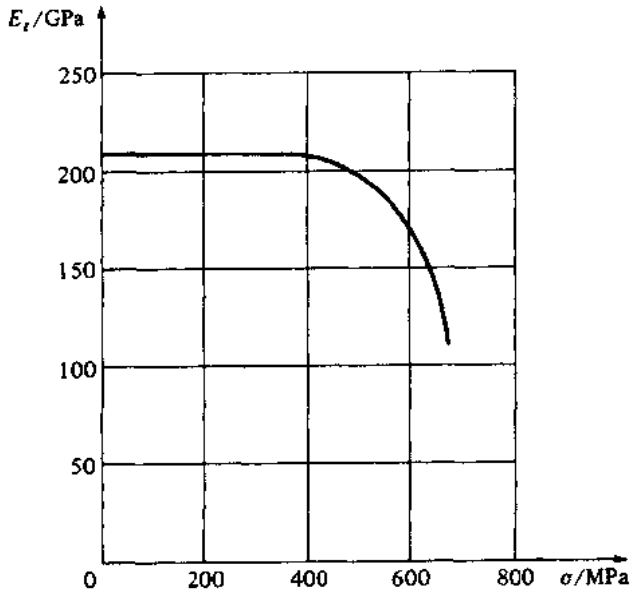


图 15-6

解 根据式(15.3)和(15.4),临界载荷为

$$P_{cr} = A\frac{\pi^2 E_t}{(L/r)^2} = \frac{\pi^2 E_t I}{L^2} \tag{1}$$

对半径为 R 的实心圆截面,$I = \pi R^4/4$,这样式(1)可整理成

$$E_t = \frac{(250\,000\ \text{N})(0.275\ \text{m})^2}{\pi^2(\pi R^4/4)} = \frac{2439}{R^4}\ \text{N/m}^2 \tag{2}$$

对任意 R,载荷引起的轴向应力为

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{250\,000}{\pi R^2} \tag{3}$$

而对任意 σ 值，我们可以通过图 15-6 确定对应的 E_t 值. 于是式(2)和(3)可以通过试凑法解得 R.

先试 $R=0.012$ m，由式(3)可得 $\sigma=250\,000/\pi(0.012\text{ m})^2=553$ MPa. 对 σ 的这个值，从图 15-6 可得 $E_t=175$ GPa. 然而从式(2)我们得到

$$E_t=\frac{2439}{(0.012\text{ m})^4}=117\text{ GPa}$$

很明显，这两个 E_t 的值不一致，假设的半径太大.

下一步试 $R=0.011$ m，由(3)式可得 $\sigma=250\,000/\pi(0.011\text{ m})^2=658$ MPa. 对 σ 的这个值，从图 15-6 可得 $E_t=125$ GPa. 然而从式(2)我们得到

$$E_t=\frac{2439}{(0.011\text{ m})^4}=167\text{ GPa}$$

这一次假设的半径又太小.

很明显，能够被接受的 R 值在 0.011 m 和 0.012 m 之间. 设 $R=0.0112$ m，式(3)给出 $\sigma=634$ MPa，而图 15-6 给出 $E_t=152$ GPa. 由式(2)解得的 $E_t=155$ GPa. E_t 的这两个值够接近了，所以我们可以假设半径为 0.0112 m 或 11.2 mm.

15.8 应用 AISC 推荐的式(15.5)求允许的轴向载荷. 柱的截面型号 W203×28，长 3 m，两端铰接，曲服点 250 MPa，$E=200$ GPa.

解 由表 12-2 查得 W203×28 型号的截面 $I_{min}=3.28\times10^6\text{ mm}^4$ 和 $A=3600\text{ mm}^2$.

于是该截面的回转半径 $r=\sqrt{3.28\times10^6\text{ mm}^4/3600\text{ mm}^2}=30.18$ mm，所以 $L/r=3000/30.18=99.4$.

由式(15.6)

$$C_C=\sqrt{\frac{2\pi^2E}{\sigma_{yp}}}=\sqrt{\frac{2\pi^2(200\times10^9\text{ N/m}^2)}{250\times10^6\text{ N/m}^2}}=125.7$$

因为两端铰接，$K=1$，所以 $KL/r<C_C$. 这样，由式(15.5)，允许的轴向应力为

$$\sigma_a=\frac{\left[1-\frac{(KL/r)^2}{2C_C^2}\right]\sigma_{yp}}{\frac{5}{3}+\frac{3(KL/r)}{8C_C}-\frac{(KL/r)^3}{8C_C^3}}=\frac{\left[1-\frac{(99.4)^2}{2(125.7)^2}\right]250\times10^6}{\frac{5}{3}+\frac{3(99.4)}{8(125.7)}-\frac{(99.4)^3}{8(125.7)^3}}$$

$$=90.35\text{ MPa}$$

允许的轴向载荷为

$$P=A\sigma_a=(3600\text{ mm}^2)\left(\frac{1\text{ m}}{10^3\text{ mm}}\right)^2(90.35\times10^6\text{ N/m})=325\text{ kN}$$

15.9 一根结构铝柱具有轧制角材截面，其尺寸如图 15-7 所示. 截面面积 A 为 1.43 in²；截面最小惯性矩出现在图示斜轴上，其大小为 0.41 in⁴. 柱的长度为 25 in. 求允许的轴向载荷.

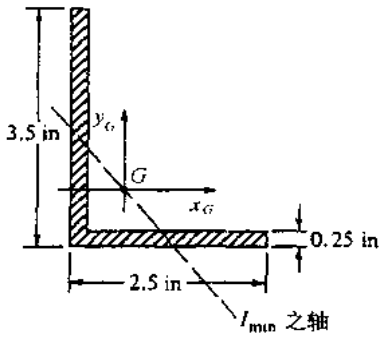


图 15-7

最小回转半径为

$$r=\sqrt{\frac{I_{min}}{A}}=\sqrt{\frac{0.41\text{ in}^4}{1.43\text{ in}^2}}=0.53\text{ in}$$

所以长细比为 $L/r=25/0.53=47.2$. 由式(15.8)，允许的应力为

$$\sigma_a=20\,200-126(47.2)=14\,250\text{ lb/in}^2$$

允许的轴向载荷为

$$P_a=A\sigma_a=(1.43\text{ in}^2)(14\,250\text{ lb/in}^2)$$
$$=20\,400\text{ lb}$$

15.10 从表 12-2 中选择一种宽翼缘截面来承载 750 kN 的轴向压缩载荷. 柱长 3.5 m，两端铰接. 材料的曲服点为 250 MPa，弹性模量为 200 GPa. 应用 AISC 的规范.

解 作为一级近似，我们先利用 $P=A\sigma$ 计算截面积

$$A = \frac{750 \times 10^3}{250 \times 10^6} = 0.0030 \text{ m}^2 \text{ 或 } 3000 \text{ mm}^2$$

这就告诉我们，截面积小于 3000 mm² 的宽翼缘截面是不可取的.

下一步我们来试一下 W203×28 型号截面. 从表 12-2 查得 $A = 3600$ mm², $I_{min} = 3.28 \times 10^6$ mm⁴. 于是最小回转半径 $r = \sqrt{3.28 \times 10^6 \text{ mm}^4 / 3600 \text{ mm}^2} = 30.2$ mm. 这样，长细比 $L/r = 3500/30.2 = 116$. 由式(15.6)，得

$$C_C = \sqrt{\frac{2\pi^2(200 \times 10^9)}{250 \times 10^6}} = 125.6$$

于是，因为 $K = 1$(两端铰接)，$KL/r < C_C$，由式(15.5)

$$\sigma_a = \frac{\left[1 - \frac{(116)^2}{2(125.6)^2}\right]250}{\frac{5}{3} + \frac{3(116)}{8(125.6)} - \frac{(116)^3}{8(125.6)^3}} = 74.95 \text{ MPa}$$

这样，$P_a = (3600 \text{ mm}^2)(1 \text{ m}/10^3 \text{ mm})^2(74.95 \times 10^6 \text{ N/m}^2) - 270$ kN，这一结果表明所选截面太小了.

现在再试 W254×72 型号的截面. 该截面面积为 9280 mm²，$I_{min} = 38.6 \times 10^6$ mm⁴. 最小回转半径 $r = \sqrt{38.6 \times 10^6 \text{ mm}^4 / 9280 \text{ mm}^2} = 64.5$ mm，所以长细比为 3500/64.5 = 54.26. 还是 $KL/r < C_C$(没有变化)，所以由式(15.5)，允许应力为

$$\sigma_a = \frac{\left[1 - \frac{(54.26)^2}{2(125.6)^2}\right]250}{\left[\frac{5}{3} + \frac{3(54.26)}{8(125.6)} - \frac{(54.26)^3}{8(125.6)^3}\right]} = 124.6 \text{ MPa}$$

而

$$P_a = (9280 \text{ mm}^2)\left(\frac{1 \text{ m}}{10^3 \text{ mm}}\right)^2(124.6 \times 10^6 \text{ N/m}^2) = 1150 \text{ kN}$$

这个截面稍大了些，所以我们再试一个 W254×54 型号的截面. 其面积为 7010 mm²，$I_{min} = 17.5 \times 10^6$ mm⁴，最小回转半径解得为 50.0 mm，长细比为 3500/50 = 70. 再利用式(15.5)求得 $\sigma_a = 114$ MPa. 由此，求得 $P_a = 799$ kN. 再换成下一个较小的截面，即 W254×43 型号；计算表明它只能承载 478 kN.

这样，我们选择 W254×54 截面，其承载轴向载荷的能力为 799 kN，稍稍高出所要求的 750 kN 载荷

15.11 两根杆 AB 和 BC 在 B 点和 A、C 两点都是铰接(见图 15-8)，每根杆初始长度都是 L，并且初始时 B 点在 AC 连线上方距离为 h 处，两根杆完全一样，截面积均为 A，杨氏模量均为 E. 一垂直力 $\boldsymbol{P}$ 作用于 B 点. 求力 $\boldsymbol{P}$ 与力 $\boldsymbol{P}$ 作用点位移 Δ 之间的关系. B 点只能垂直移动.

解 我们将位移 Δ 出现后每根杆中的轴向力大小记为 S，同时将每根杆此时长度记为 $L(1-\varepsilon)$. 由铰接点 B 的平衡，我们有 $S = (P/2)\sin\alpha$，其中 α 是位移后系统与水平面所夹之角. 由几何关系，

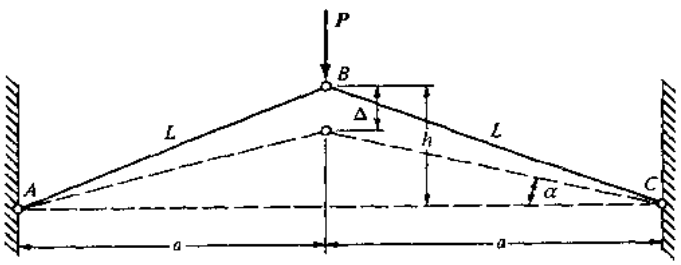


图 15-8

$$\sin\alpha = \frac{h - \Delta}{L(1-\varepsilon)}, \quad \text{故 } S = \frac{PL(1-\varepsilon)}{2(h-\Delta)} \tag{1}$$

同时，　　$[L(1-\epsilon)]^2 = a^2 - (h-\Delta)^2 = L^2 - 2h\Delta + \Delta^2$

所以　　$$\epsilon = 1 - \frac{\sqrt{L^2 - 2h\Delta + \Delta^2}}{L} \tag{2}$$

对式(1)，利用 $\sigma = S/A$，(其中 σ 表示杆中轴向应力)和胡克定律，$\sigma = E\varepsilon$，得

$$P = 2AE\frac{h-\Delta}{L}\frac{\epsilon}{1-\epsilon} \tag{3}$$

将式(2)代入式(3)，得

$$P = 2AE\frac{h-\Delta}{L}\left(\frac{L}{\sqrt{L^2 - 2h\Delta + \Delta^2}} - 1\right) \tag{4}$$

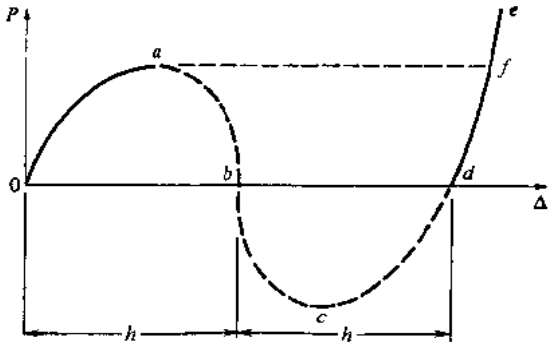


图 15-9

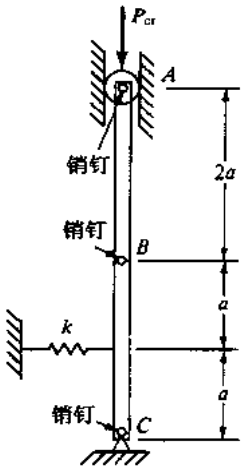


图 15-10

方程式(4)即为所求关系．注意，对位移 Δ 的大小并未作出规定；也就是说与 h 相比，它并非必须是小量．按方程式(4)作出的曲线如图 15-9 所示．从图上可以看到，曲线有最大值和最小值，从式(4)可明显看出当 $\Delta = h$ 和 $\Delta = 2h$ 时，曲线与水平轴相交．由该图能看出，若垂直力由零逐渐增加到对应 a 点的值，就达到了最大值．此后，用来增加 Δ 的力 P 的大小理论上会减小，直到 $\Delta = h$，此时无需施加力使铰接点 B 保持在 AC 水平连线上．然而，在这样的状态中，实际上 a 和 d 之间曲线上的所有点上平衡是不稳定的(所以曲线画成虚线)．弹性作用会进一步增加 Δ，所以此时需要一负的(向上)垂直力来保持杆的位置，正如曲线上 bcd 段所示．当 $\Delta = 2h$(点 d)，杆已经到达初始位置的镜像位置，此时 也无需力来保持系统处于这一位置，而杆中也无应力．垂直向下位移再继续发展，则曲线上 de 段表示向下载荷与垂直位移之间的关系．这段用实线画的曲线对应于稳定平衡状态．

实际上，若载荷是作用于 B 的静载荷，杆系中一些很小的缺陷或是轻微的振动都会使系统从曲线上位置 a 直接"跳跃"到位置 f．这称为直通现象．

15.12　两根一样的刚性杆 AB 和 BC 在 B、C 两端铰接，在 A 端与一无摩擦滚轮铰接，该轮只能垂直移动(见图 15-10)．一根弹性常数为 k 的弹簧与 BC 杆按图示方式连接．求该系统的临界垂直载荷．

解　由两根刚性杆组成系统的分离体图如图 15-11 所示．图中的系统呈略微屈曲的形状，屈曲程度以角 $\Delta\theta$ 描述．因为 A 和 C 是铰接的，必须在每个铰接点上标明约束反力的两个分量．弹簧伸长量为 $a\Delta\theta$，当然也就对杆 BC 施加一大小为 $ka\Delta\theta$ 的力．铰接点 B 是属于该隔离体内部的，所以在该点没有标约束反力．由静平衡可写出方程

$$+\circlearrowleft \sum M_A = C_x(4a) - ka\Delta\theta(3a) = 0$$

或
$$C_x = \frac{3ka\Delta\theta}{4}$$

BC 杆的分离体图如图 15-12 所示. 该图上标出了 B 点的约束反力，因为现在这些力对分离体来说是外力了. 我们有

$$+\circlearrowleft \sum M_B = \frac{3ka\Delta\theta}{4}2a - P_{cr}a(2a\Delta\theta)$$
$$-(ka\Delta\theta)a = 0 \quad 或 \quad P_{cr} = \frac{ka}{4}$$

用上述解法是不可能求得 $\Delta\theta$ 的值的.

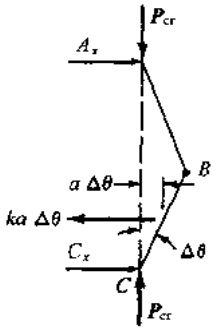


图 15-11

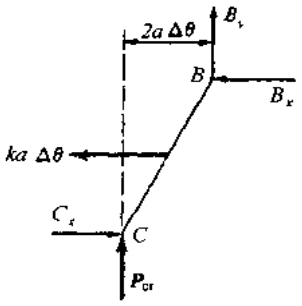


图 15-12

补 充 习 题

15.13 一根实心圆截面钢杆直径 2 in. 杆两端铰接并受轴向压力作用. 若杆材的比例根限为 36 000 lb/in^2，$E = 30\times10^6$ lb/in^2，求能使欧拉公式(15.1)成立的最短长度. 同时求柱的长度最短时的欧拉屈曲载荷.

答案：45.5 in；112 800 lb

15.14 求一根实心圆截面钢柱的长细比，柱的直径 4 in，长 9 ft.

答案：108

15.15 图 15-13 所示柱两端铰接并可以向上端开口自由延伸. 柱是钢的，直径 25 mm，在 16℃ 时所在位置如图所示. 求在什么温度时柱即将发生屈曲. 取 $\alpha = 12\times10^{-6}(℃)^{-1}$，$E = 200$ GPa. 柱的重量忽略不计.

答案：29.3℃

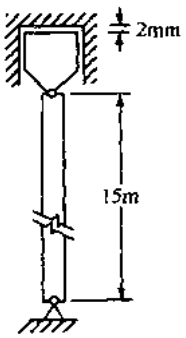


图 15-13

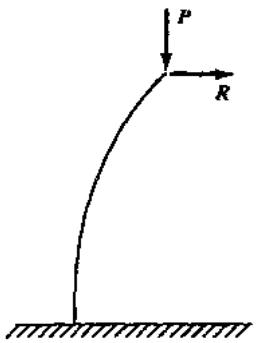


图 15-14

15.16 一根长为 L 的杆下端固结，上端受垂直和水平两个力的作用，如图 15-14 所示. 垂直力的大小等于这根杆欧拉载荷的四分之一. 求杆上端的横向位移.

答案：$16(4-\pi)RL^3/\pi^3EI$

15.17 应用 AISC 公式求长 12 ft 截面型号为 W8×40 柱的允许轴向载荷. 材料的屈服点为 36 000 lb/in^2, $E=30\times10^6$ lb/in^2.

答案:194 000 lb

15.18 应用 AISC 公式求长 4 m 截面型号为 W203×59 柱的允许轴向载荷. 柱材是钢的,曲服点为 250 MPa, $E=200$ GPa

答案:821 kN

15.19 求型号为 6061－T6 铝柱的允许轴向载荷. 其截面与图 15-7 中的截面一样,长为 50 in.

答案:$P_a=8200$ lb

15.20 从表 12-2 中选择一种宽翼缘截面做一根 5 m 长的柱来承受 675 kN 的轴向载荷. 材料的曲服点为 250 MPa,杨氏模量为 200 GPa. 利用 AISC 公式.

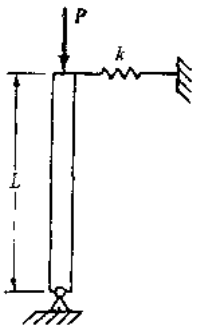


图 15-15

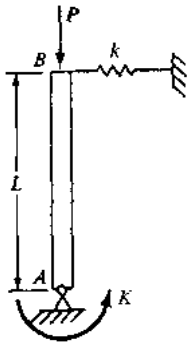


图 15-16

15.21 图 15-15 中的刚性杆下端铰接,上端受一根弹性常数为 k 的弹簧约束,使其横向移动部分受限. 给杆的上端一个十分微小的横向位移,求载荷 **P** 的临界值.

答案:$P_{cr}=kL$

15.22 一根初始是直的杆在上下两端受弹簧弹性约束,如图 15-16 所示. A 端的扭力弹簧提供每弧度 K 牛顿·米阻力阻止 A 端角位移. B 端的线性弹簧提供每单位水平位移 k 牛顿的阻力阻止 B 端水平位移,当杆处于垂直位置时每根弹簧的力为零. 求控制杆屈曲的方程.

答案:$aL\cot aL+\dfrac{kL}{P-kL}-\dfrac{PL}{K}=0$,其中 $a^2=\dfrac{P}{EI}$

15.23 两根刚性垂直杆 AB 和 BC 组成图 15-17 所示的系统. 该系统 C 端铰接,A 端的横向位移受阻,但可自由转动. 两根杆在 B 端也是铰接. B 点的横向位移由两根线性弹簧约束而部分受限. 每根弹簧提供每英寸横向位移 k 磅的阻力. 若在力 **P** 作用之前弹簧不受力,求屈曲载荷 P_{cr}.

答案:$12k$

15.24 图 15-18 中的圆铝杆 AB 被两根水平弹簧支撑并受垂直压缩载荷 **P** 的作用. 弹性常数 $k_1=4$ N/mm

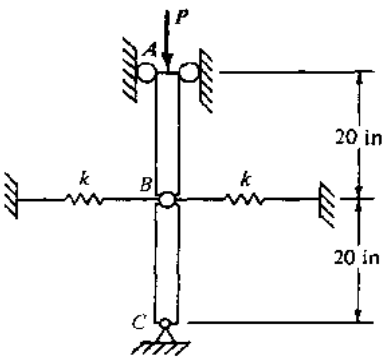


图 15-17

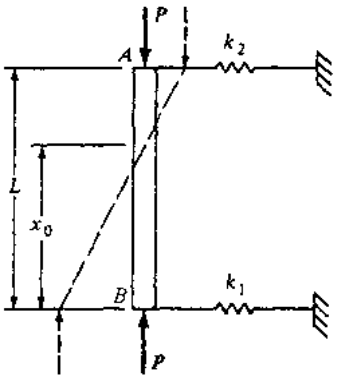


图 15-18

和 $k_2 = 8$ N/mm. 杆长 600 mm，其直径 16 mm，$E = 70$ GPa. 求屈曲载荷屈曲后杆的形状.

答案：$P_{cr} = L\left(\dfrac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}\right) = 1.6$ kN；杆仍然是直的，但一点（$x_0 = 400$ mm）转动

15.25 一根长细杆长为 L 刚度为 EI，其两端受弹性介质支撑. 介质在每一端施加大小为每弧度角位移 λ 的恢复力矩. 求从中可以求得屈曲载荷 P_{cr} 的方程.

答案：$\tan\dfrac{\alpha L}{2} = -\dfrac{P_{cr}}{\alpha\lambda}$，其中 $\alpha^2 = \dfrac{P_{cr}}{EI}$

译者后记

《静力学与材料力学》一书以比较简洁的方式将静力学和材料力学的主要概念和定理以及基本解题方法介绍给工科院校的学生.作者不追求理论体系的严密和完整,但强调理论与实际的结合以及解决实际工程问题能力的培养.往往在每一章一开始作者就列出重要的概念并直接给出了重要定理的结论,而将有些定理的推导或证明放在后面的例题中,并将有些概念加以深化或推广.书中的例题和补充习题紧密衔接,密切结合工程实际,形式新颖,涉及面广.尤其是第十章有关旋转薄壳体的讨论,涉及压力容器、深海潜水装置等现代科技和工业经常遇到的问题,有较高的实际应用价值.该书的另一特色是在例题中详细列出了11个计算机程序,并引导读者运用这些程序来解题,充分显示了现代计算技术在静力学和材料力学这门经典学科中广泛的应用.这些程序一直在CYBER系统的主机上运行,只要在输入格式上稍作改动就能在大多数PC机上使用.

该书的编排方式对国内工科院校也有可借鉴之处.我们现在多数工科院校都是先上"理论力学",包括静力学、运动学和动力学,有的院校最后还讲一点分析力学,再上"材料力学"课程.这种按部就班的教学安排已经沿用了几十年.然而今天很多新的课程在与"理论力学"、"材料力学"等经典学科争夺教学时间,按部就班的教学方式恐怕难以维持下去.将"静力学"和"材料力学"合成一门课程来讲不失为一种比较可行的教学改革方案.对于有些工科院校的专业,在工作中并不涉及研究对象的运动,他们对运动学和动力学的要求不高,学生有"静力学"和"材料力学"方面的知识已足够应付实践中出现的问题,不必让学生在这些课程上花费更多宝贵的时间.另一方面,这样的教学安排也不会削弱对工科院校学生基础知识和基本能力的培养.

需要提醒读者注意的是,尽管目前英、美等国家正在逐步从英制单位制向公制单位制过渡,很多的书籍、刊物都采用了SI单位制,但在工程领域英制单位制仍在使用.本书的例题和补充习题有一半采用英制单位,另一半采用公制单位.鉴于书中英制单位的使用如此频繁,译者在处理这一问题时,保留了原书的单位制,在后记中给出涉及到的英制单位的英、汉语名称和英语缩写、符号以及换算表.这可能会给有些不熟悉英制单位的读者带来一些麻烦.

类别	英语名称	缩写或符号	汉语名称	对公制单位的比值
长度	inch	in.	英寸	2.54毫米
长度	foot	ft.	英尺	30.48厘米
长度	mile	mi.	英里	1.609千米
重量	pound	lb.	磅	0.454千克
重量	kilopound	kips.	千磅	454.0千克
力矩	pound－foot	lb·ft	磅·英尺	0.138千克·米
速度	mile per hour	mi/h	每小时英里	0.447米/秒
转速	revolution per minute	rpm	每分钟转数	1转/分＝0.1047弧度/秒

因时间仓促,且译者的水平有限,译文中的不足之处在所难免.恳请读者指正.

郭长铭

2001.3于合肥 中国科技大学